Interrogation Écrite n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

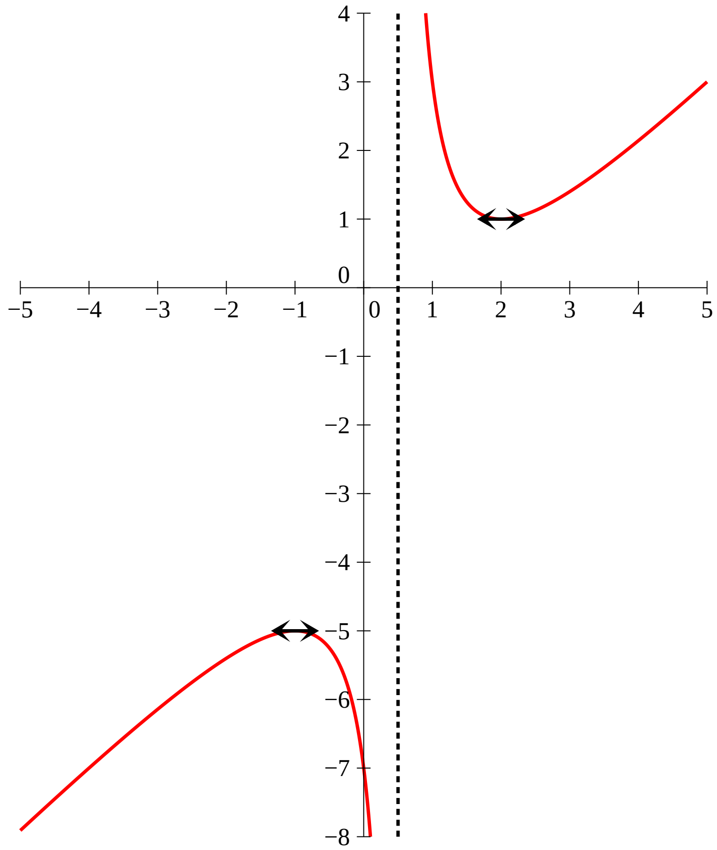
13 septembre 2016

1. Je ne vais pas réussir mon interro de maths, je n'ai donc pas révisé tout le week-end.
2. Le réel -1 est racine évidente de l'équation : $(-1)^3-3\times(-1)^2-3\times(-1)+1 = -1-3+3+1 = 0$. On peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $x^3-3x^2-3x+1 = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$. Par identification des coefficients, $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$. Le deuxième facteur est donc x^2-4x+1, qui a pour discriminant $\Delta = 16-4 = 12$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$.
3. Il faut distinguer des cas selon les valeurs de x (on peut présenter sous forme de tableau) :
   - si $x \leq -2$, l'inéquation s'écrit sous la forme $1-2x \leq -x-2$, soit $x \geq 3$, ce qui ne se produit jamais dans l'intervalle considéré.
   - si $-2 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, l'inéquation s'écrit $1-2x \leq x+2$, soit $x \geq -\dfrac{1}{3}$, on garde donc comme solutions les réels de l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$.
   - enfin, si $x \geq 2$, l'inéquation s'écrit $2x-1 \leq x+2$, soit $x \leq 3$, on garde donc l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$.

   Conclusion : $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{1}{3}, 3\right]$.
4. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{1}{2}\}$. Sa dérivée est donnée par la formule $f'(x) = \dfrac{(4x-6)(2x-1)-2(2x^2-6x+7)}{(2x-1)^2} = \dfrac{8x^2-16x+6-4x^2+12x-14}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^2-4x-8}{(2x-1)^2} = \dfrac{4(x^2-x-2)}{(2x-1)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2-x-2, qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et pour racines $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Calculons en passant $f(-1) = \dfrac{15}{-3} = -5$ et $f(2) = \dfrac{3}{3} = 1$. Les calculs de limites sont tous immédiats (en admettant la règle du quotient des termes de plus haut degré pour les limites en $\pm\infty$), on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Et la courbe correspondante (pour les curieux, la droite d'équation $y = x - \dfrac{5}{2}$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$) :


4
3
2
1
0
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8