Devoir Commun

PTSI Lycée Eiffel

28 janvier 2017

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n = 1$.
2. Donner le module et un argument de chacune des solutions obtenues.
3. Calculer la somme des solutions de l'équation.

Exercice 2

On pose pour cet exercice $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{2x}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f, et préciser sa parité.
2. Après avoir justifié son existence, calculer la dérivée f' de la fonction f et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$.
3. En déduire une expression simplifiée de la fonction f sur chacun de ses intervalles de définition.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation $(E) : y' - \tan(x)y = \cos^2(x)$, qu'on cherche à résoudre sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Donner une primitive de la fonction tangente sur I (on pourra écrire $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour trouver l'inspiration), et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. Linéariser l'expression $\cos^3(x)$.
3. Déterminer une solution particulière de l'équation (E), puis en déduire toutes ses solutions sur l'intervalle I.
4. Déterminer l'unique solution f de l'équation (E) sur I vérifiant $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n = f(n)$$

,

où f est une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$, et $u_1 \in \mathbb{R}$. Toutes les suites de ce problème seront définies sur $\mathbb{N}^*$.

Partie A : étude d'un exemple.

Dans toute cette partie, on suppose que $f(n) = 2n + 1$.

1. Pour cette première question on suppose $u_1 = 1$. Calculer u_2 et u_3. Conjecturer la valeur de u_n puis demontrer votre conjecture.
2. Dans cette question, on suppose désormais $u_1 > 1$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n et de u_n.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > 1$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) Montrer que (u_n) converge. Que peut-on dire de sa limite (sans chercher à la calculer) ?
   (e) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n - 1 \leq \dfrac{1}{n^2}(u_1 - 1)$.
   (f) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On suppose toujours $u_1 > 1$ et on se propose de retrouver la limite de (u_n) par une autre méthode.
   (a) On pose $v_n = n^2 u_n$. Déterminer une relation entre v_{n+1}, v_n et n.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = n^2 - 1 + u_1$.
   (c) Redémontrer le résultat de la question $2.f$.

Partie B : cas général.

On note (i) la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n = f(n)$.
On note (ii) la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n = 0$.

1. Soit (v_n) une suite vérifiant la proriété (ii), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = \dfrac{v_1}{n^2}$.
   Prouver réciproquement que toute suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{k}{n^2}$, avec $k \in \mathbb{R}$, vérifie la propriété (i).
   On obtient ainsi toutes les suites vérifiant (ii).
2. Soient deux suites quelconques (u_n) et (v_n) vérifiant la propriété (i), prouver que la suite $(u_n - v_n)$ vérifie la propriété (ii). On en déduit que toute suite vérifiant (i) est somme d'une suite vérifiant (i) et d'une suite vérifiant (ii).
3. Montrer réciproquement que tout suite s'écrivant comme somme d'une suite vérifiant (i) et d'une suite vérifiant (ii) vérifie la propriété (ii).
   On a ainsi prouvé que toute suite vérifiant (i) est somme d'une suite quelconque vérifiant (ii) et d'une suite particulière vérifiant (i).
4. On reprend l'exemple de la partie A où $f(n) = 2n + 1$ et $u_1 > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite constante vérifiant (i).
   (b) Déduire des question précédentes l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Retrouver la limite de la suite (u_n).