Devoir Surveillé n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 mai 2017

Exercice 1

1. Il s'agit d'une famille de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, il suffit donc de prouver qu'elle est libre pour qu'il s'agisse d'une base. Supposons donc que $a(1,0,0,0) + b(0,1,1,0) + c(1,0,0,-1) + d(1,1,-1,0) = 0$. La dernière coordonnée donne immédiatement $c = 0$, et il nous reste alors les trois équations $a + d = b + d = b - d = 0$. La somme et la différence des deux dernières conditions impliquent que $b = d = 0$, et on en déduit sans problème que $a = 0$. La famille est bien libre, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Puisque la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre, on peut directement affirmer que $F + G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$. Par ailleurs, les deux espaces F et G sont de dimension 2 (les familles (u_1, u_2) et (u_3, u_4) étant libres en tant que sous-familles libres d'une base de $\mathbb{R}^4$), donc la somme de leurs dimensions est égale à celle de l'espace $\mathbb{R}^4$. Les deux sous-espaces sont donc bien supplémentaires.
3. On définit une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ par $f(x, y, z, t) = (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0)$.
   (a) Calculons donc $f(\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = (2\lambda x + 2x' - \lambda y - y' + \lambda z + z' + 2\lambda t + 2t', \lambda y + y' + \lambda z + z', \lambda y + y' + \lambda z + z', 0) = \lambda(2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0) + (2x' - y' + z' + 2t', y' + z', y' + z', 0) = \lambda f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t')$. L'application est bien linéaire, il s'agit même d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Pour cela, on va résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$. On a donc $z = -y$, et en reportant dans la première équation $2x - 2y + 2t = 0$, soit $t = y - x$. On en déduit que $\ker(f) = \{(x, y, -y, y - x) \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$, soit $\ker(f) = \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 1))$. Le premier vecteur est manifestement dans G (c'est un des deux vecteurs de la base définissant G), et le deuxième aussi : $(0, 1, -1, 1) = (1, 1, -1, 0) - (1, 0, 0, -1) = u_4 - u_3$. Toutes les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs appartiennent aussi à G qui est un sous-espace vectoriel, donc $\ker(f) \subset G$. Ces deux ensembles étant tous les deux des sous-espaces vectoriels de dimension 2, on a nécessairement $\ker(f) = G$.
   (c) On calcule comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique pour obtenir $\text{Im}(f) = \text{Vect}((2, 0, 0, 0), (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 0))$. On peut bien sûr supprimer l'une des occurrences du vecteur qui apparait deux fois (et diviser l'autre par deux tant qu'on y est), et $(1, 1, 1, 0) = (2, 0, 0, 0) + (-1, 1, 1, 0)$ est également inutile. Sans surprise (le théorème du rang nous assurait que l'image serait de dimension 2), on a donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (-1, 1, 1, 0))$. Le premier vecteur n'est autre que u_1 le second est égal à $u_2 - u_1$ et appartient donc à F, on conclut comme à la question précédente que $\text{Im}(f) = F$.
   (d) Calculons bêtement $f^2(x, y, z, t) = (2(2x - y + z + 2t) - (y + z) + (y + z), (y + z) + (y + z), (y + z) + (y + z), 0) = (4x - 2y + 2z + 4t, 2x + 2y, 2x + 2y, 0) = 2f(x, y, z, t)$. On peut écrire ce résultats sous la forme $\left(\dfrac{f}{2}\right)^2 = \dfrac{f}{2}$, ce qui prouve que $\dfrac{f}{2}$ est un projecteur. L'application f est donc la composée du projecteur $\dfrac{f}{2}$ (qui projette évidemment sur $\text{Im}(f)$, parallèlement

à $\ker(f)$, la division par 2 ne modifie pas le noyau ni l'image), par une homothétie de rapport 2.

(e) On aura $g^2 = (f - \mathrm{id})^2 = f^2 - 2f + \mathrm{id} = \mathrm{id}$, donc g est une symétrie. Le sous-espace parallèlement auquel on symétrise est $\ker(g + \mathrm{id}) = \ker(f)$ qu'on a déjà calculé plus haut. Le sous-espace par rapport auquel on symétrise sera $\ker(g + \mathrm{id}) = \ker(f - 2\,\mathrm{id})$ qu'il faut calculer. En fait non on n'en a même pas besoin : d'après la question précédente, les éléments de l'image de f sont envoyés sur eux-même par $\dfrac{f}{2}$ (puisqu'il s'agit d'un projecteur) donc appartiennent au noyau de $\ker(f - \mathrm{id})$. L'application g est donc la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 2

1. On peut normaliser sur $\mathbb{R}$ tout entier pour obtenir une équation homogène de la forme $y' - \dfrac{x}{x^2+1}y = 0$, dont les solutions sont de la forme $Ke^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = K\sqrt{x^2+1}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. Posons donc $g(x) = ax + b$, alors $g'(x) = a$, et $(x^2+1)g' - xg = ax^2 + a - ax^2 - bx = a - bx$. On veut que cette expression soit égale à $1 + x$, une identification immédiate impose $a = 1$ et $b = -1$, soit $g(x) = x - 1$. Les solutions de l'équation (E) sont donc toutes les fonctions $y_K : x \mapsto x - 1 + K\sqrt{x^2+1}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
3. On calcule $y_K(1) = K\sqrt{2}$, puis $y_K'(x) = 1 + \dfrac{Kx}{\sqrt{x^2+1}}$, donc $y_K'(1) = 1 + \dfrac{K}{\sqrt{2}} = 1 + \dfrac{K\sqrt{2}}{2}$. La tangente recherchée a donc pour équation $y = \left(1 + \dfrac{K\sqrt{2}}{2}\right)(x-1) + K\sqrt{2} = x + \dfrac{K\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{K\sqrt{2}}{2} - 1$.
4. En posant $x = -1$ dans l'équation précédent, la variable K disparait et on obtient toujours $y = -2$, ce qui prouve que toutes les tangentes se coupent au point de coordonnées $(-1, -2)$.
5. (a) C'est du cours : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$. On en déduit $\sqrt{1 + x + \dfrac{x^2}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

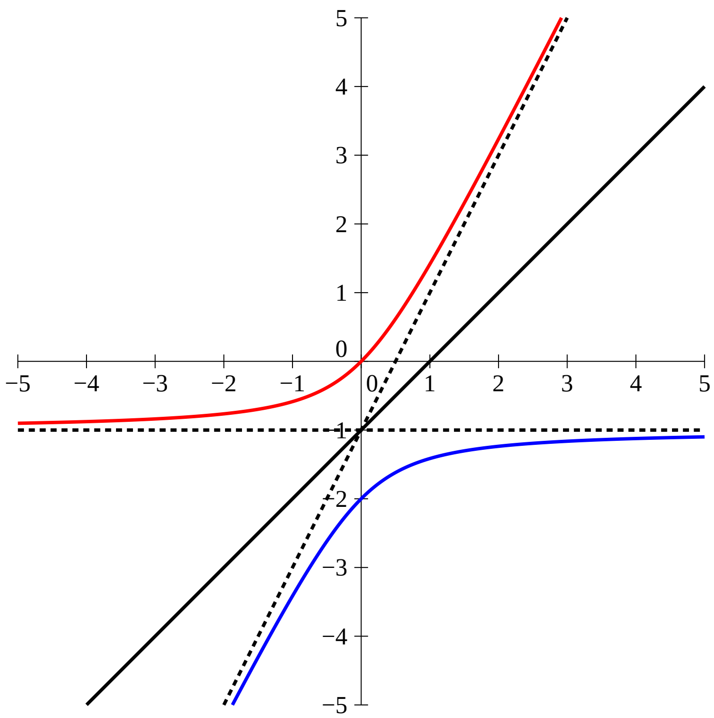
   (b) Posons donc $x = 1 + h$, et calculons $y_K(1+h) = 1 + h - 1 + K\sqrt{(1+h)^2+1} = h + K\sqrt{2}\sqrt{1 + h + \dfrac{h^2}{2}}$. On peut exploiter le calcul précédent : $y_K(1+h) = h + K\sqrt{2} + \dfrac{K\sqrt{2}}{2}h + \dfrac{K\sqrt{2}}{8}h^2 + o(h) = K\sqrt{2} + \left(1 + \dfrac{K\sqrt{2}}{2}\right)h + \dfrac{K\sqrt{2}}{8}h^2 + o(h)$. Si on veut vraiment écrire de façon classique le DL1 de la fonction en 1, on a donc $y_K(x) \underset{x \to 1}{=} K\sqrt{2} + \left(1 + \dfrac{K\sqrt{2}}{2}\right)(x-1) + \dfrac{K\sqrt{2}}{8}(x-1)^2 + o(x-1)^2$.

   (c) L'écart entre la courbe et la tangente est équivalent à $\dfrac{K\sqrt{2}}{8}(x-1)^2$ (sauf quand $K = 0$ mais dans ce cas y_K est une fonction affine donc la courbe est confondue avec la tangente), dont le signe dépend évidemment de celui de K. Lorsque $K > 0$ la courbe sera au-dessus de la tangente au voisinage de 1, si $K < 0$ elle sera en-dessous.
6. On va comme à notre habitude poser $X = \dfrac{1}{x}$ et calculer $f\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{X} - 1 + K\sqrt{1 + \dfrac{1}{X^2}}$. On va supposer $X > 0$ ici pour sortir un facteur $\dfrac{1}{X}$ de la racine carrée : $f\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{X} - 1 +$

$\frac{K}{X}\sqrt{1+X^2} = \frac{1}{X} - 1 + \frac{K}{X}\left(1 + \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) = \frac{1+K}{X} - 1 + \frac{K}{2}X + o(X)$. Autrement dit, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} (1+K)x - 1 + \frac{K}{2X} + o\left(\frac{1}{X}\right)$. On élimine le cas où $K = 0$ (la fonction est alors affine et confondue avec son asymptote oblique d'équation $y = x - 1$). La droite d'équation $y = (1+K)x - 1$ est asymptote oblique (horizontale dans le cas où $K = -1$) à $\mathcal{C}_K$, et comme $f(x) - ((1+K)x - 1) \sim \frac{K}{2x}$, la courbe sera au-dessus de son asymptote lorsque $K > 0$ et en-dessous lorsque $K < 0$ (le tout au voisinage de $+\infty$ bien entendu).

En $-\infty$, il faut faire attention à ne pas sortir le X de la racine carrée comme on l'a fait ci-dessus : si $X < 0$, on aura $f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X} - 1 - \frac{K}{X}\sqrt{1+X^2} = \frac{1-K}{X} - 1 - \frac{K}{2X} + o\left(\frac{1}{X}\right)$. Il y a donc toujours une asymptote oblique (horizontale si $K = 1$) d'équation $y = (1-K)x - 1$, et $\mathcal{C}_K$ sera située au-dessus de son asymptote si $K < 0$ et en-dessous si $K > 0$ au voisinage de $-\infty$.

7. On connait déjà les asymptote horizontales et obliques pour chacune des trois courbes (dont l'une est une droite), il ne manque que les variations de y_1 et y_{-1}. La dérivée $y_1'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ est toujours positive car $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, donc $\sqrt{x^2+1} + x \geq 0$. La fonction y_1 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le même argument (avec un x à la place du $-x$) prouve que y_{-1} est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Une allure des courbes ($\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_0$ en noir et $\mathcal{C}_{-1}$ en bleu) :



Exercice 3

1. Elle vaut simplement $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

2. De même on calcule sans problème $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$.

3. Il faut tenir compte de l'ordre : il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de positionner les deux Piles parmi les

quatre tirages effectués, la probabilité demandée vaut donc $6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{54}{256} = \frac{27}{128}$.

4. Notons A l'événement : « On a obtenu un Pile et deux Faces lors des deux premiers lancers » et B l'événement « On a obtenu Pile au deuxième lancer ». On calcule comme à la question précédente $P(A) = \binom{3}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$. Inutile de calculer $P(B)$, ce qui nous intéresse plutôt est $P(A \cap B) = \frac{9}{64}$ (l'événement $A \cap B$ revient à tirer dans cet ordre Face, Pile, Face). On en déduit que $P_A(B) = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{27}{64}} = \frac{1}{3}$. C'est tout à fait logique : si on sait à l'avance qu'il y aura exactement un Pile lors des trois lancers, il y a une chance sur trois que ce Pile soit obtenu lors de chacun des trois lancers effectués.
5. Notons C l'événement : « On a obtenu au moins un Pile lors des trois premiers lancers ». Par passage au complémentaire, on a $P(C) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$. De plus, $P(B) = \frac{1}{4}$, et $P_B(C) = 1$ (si on a obtenu Pile au deuxième tirage, on a nécessairement obtenu au moins un Pile). On peut alors appliquer la formule de Bayes pour calculer $P_C(B) = \frac{P_B(C) \times P(B)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{37}{64}} = \frac{16}{37}$.
6. (a) Facilement $p_2 = \frac{1}{16}$ (on a tiré deux Piles aux deux premiers lancers), et $p_3 = \frac{3}{64}$ (on a forcément tiré FPP, si on avait tiré Pile au premier lancer, on ne pourrait pas avoir deux Piles consécutifs ensuite sans avoir eu deux Piles de suite dès les deux premiers lancers). Ensuite, pour obtenir les deux premiers Piles consécutifs aux lancers 3 et 4, on doit nécessairement avoir obtenu un Face au lancer 2, et peu importe ce qui s'est passé au premier lancer. Les deux possibilités sont donc $PFPP$ et $FFPP$, et $p_4 = \frac{3}{256} + \frac{9}{256} = \frac{3}{64}$.

   (b) On cherche à calculer la probabilité de l'événement A_{n+2}, décomposons les cas selon ce qui s'est produit au premier lancer :
   - si on a obtenu un Face au premier lancer, il ne peut bien sûr pas faire partie d'une suite de deux Piles consécutifs, et on peut donc « oublier » le résultat du premier tirage et faire comme si on voulait obtenir nos deux premiers Piles consécutifs aux tirages n et $n+1$, ce qui se produit par définition avec probabilité p_{n+1}. Comme la probabilité d'obtenir Face au premier tirage vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité d'avoir à la fois Face au premier tirage et A_{n+2} réalisé est donc $\frac{3}{4}p_{n+1}$.
   - si on a obtenu Pile au premier lancer, il faut absolument obtenir Face au deuxième pour ne pas avoir deux Piles consécutifs. Ensuite, on peut faire comme ci-dessus et « oublier » ces deux premiers résultats, on aura alors une probabilité p_n d'obtenir les premiers Piles consécutifs aux tirages $n-1$ et n. Comme la probabilité de tirer PF aux deux premiers lancers vaut $\frac{3}{16}$, on retrouve le terme $\frac{3}{16}p_n$.

   Il ne reste plus qu'à additionner ces deux possiblités (techniquement on a un système complet d'événements caché derrière tout ça), ce qui donne bien $p_{n+2} = \frac{3}{4}p_{n+1} + \frac{3}{16}p_n$.

   (c) La suite (p_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique $x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}$ admet pour discriminant $\Delta = \frac{9}{16} + \frac{12}{16} = \frac{21}{16}$ et pour racines $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{8}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{8}$ (superbes valeurs). On peut donc affirmer qu'il existe deux constantes A et B telle que $p_n = A\left(\frac{3+\sqrt{21}}{8}\right)^n + B\left(\frac{3-\sqrt{21}}{8}\right)^n$. Les conditions initiales nous donnent $p_2 = \frac{1}{16} = A\left(\frac{3+\sqrt{21}}{8}\right)^2 + B\left(\frac{3-\sqrt{21}}{8}\right)^2 = \frac{A(30+6\sqrt{21}) + B(30-6\sqrt{21})}{64}$,

soit $A(15+3\sqrt{21})+B(15-3\sqrt{21})=2$; puis $p_3=\dfrac{3}{64}=A\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{8}\right)^3+B\left(\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}\right)^3=\dfrac{A(216+48\sqrt{21})+B(216-48\sqrt{21})}{512}$, soit $3=A(27+6\sqrt{21})+B(27-6\sqrt{21})$. Pour simplifier le calcul, on peut poser $C=A+B$ et $D=A-B$, pour obtenir les conditions $2=15C+3\sqrt{21}D$ et $3=27C+6\sqrt{21}D$. En faisant l'opération $2L_1-L_2$, on trouve alors $1=3C$, soit $C=\dfrac{1}{3}$ et on en déduit $D=-\dfrac{1}{\sqrt{21}}$. En faisant la demi-somme et la demi-différence, on en déduit que $A=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2\sqrt{21}}$ et $B=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2\sqrt{21}}$. Autrement dit, on a (attention les yeux) :
$$p_n=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2\sqrt{21}}\right)\times\left(\frac{3+\sqrt{21}}{8}\right)^n+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2\sqrt{21}}\right)\times\left(\frac{3-\sqrt{21}}{8}\right)^n.$$

(d) Faire un calcul explicite n'a pas le moindre intérêt, contentons-nous d'écrire que $p_n=A\times x_1^n+B\times x_2^n$, et calculons (avec un petit décalage d'indices) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}p_k=Ax_1^2\sum_{k=0}^{n-2}x_1^k+Bx_2^2\sum_{k=0}^{n-2}x_2^k=Ax_1^2\times\frac{1-x_1^{n-1}}{1-x_1}+Bx_2^2\times\frac{1-x_2^{n-1}}{1-x_2}$. On ne cherchera pas à expliciter plus cette valeur, par contre on va calculer la limite quand n tend vers $+\infty$. Comme x_1 et x_2 sont tous les deux compris entre -1 et 1 (puisque $4<\sqrt{21}<5$), cette limite vaut $p=\dfrac{Ax_1^2}{1-x_1}+\dfrac{Bx_2^2}{1-x_2}=A\times\dfrac{\frac{30+6\sqrt{21}}{64}}{\frac{5-\sqrt{21}}{8}}+B\times\dfrac{\frac{30-6\sqrt{21}}{64}}{\frac{5+\sqrt{21}}{8}}=\dfrac{3A}{4}\times\dfrac{5+\sqrt{21}}{5-\sqrt{21}}+\dfrac{3B}{4}\times\dfrac{5-\sqrt{21}}{5+\sqrt{21}}$ $=\dfrac{3A}{16}(46+10\sqrt{21})+\dfrac{3B}{16}(46-10\sqrt{21})=\dfrac{69}{8}(A+B)+\dfrac{15\sqrt{21}}{8}(A-B)=\dfrac{23}{8}-\dfrac{15}{8}$ (en utilisant les valeurs de C et D calculées plus haut), donc notre somme vaut tout bêtement 1. Cela signifie tout simplement que la probabilité qu'on finisse par obtenir deux Piles consécutifs (quitte à attendre un temps qui tend vers l'infini) est égale à 1, autrement dit qu'il est certain (ou plutôt presque certain avec la terminologie habituelle sur les univers infinis) qu'on va finir par obtenir deux Piles consécutifs.

Exercice 4

On se place dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$, où on considère les sous-ensembles $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y=z\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y=z-2y=0\}$.

1. De façon à peu près immédiate, $F=\mathrm{Vect}((1,0,0);(0,1,1))$ et $G=\mathrm{Vect}((1,1,2))$.
2. On a déjà $\dim(F)+\dim(G)=2+1=3=\dim(E)$. De plus, si un vecteur $u(x,y,z)\in F\cap G$, alors il doit vérifier les trois équations $y-z=x-y=z-2y=0$, qui impliquent trivialement $x=y=z=0$, donc $F\cap G=\{0\}$. Les deux sous-espaces sont bien supplémentaires.
3. Pour cette question, on a besoin de décomposer un vecteur $u(x,y,z)$ sur les sous-espaces supplémentaires F et G, donc de trouver (en utilisant les bases données à la première question) trois réels tels que $(x,y,z)=a(1,0,0)+b(0,1,1)+c(1,1,2)$. On doit donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccc} a & & + & c & =x\\ & b & + & c & = y\\ & b & + & 2c & = z\end{array}\right.$. La différence des deux dernières équations donne $c=z-y$, on en déduit $b=2y-z$ et $a=x+y-z$. Autrement dit, $u=u_F+u_G$, avec $u_G=c(1,1,2)=(z-y,z-y,2z-2y)\in G$ et $u_F=a(1,0,0)+b(0,1,1)=(x+y-z,2y-z,2y-z)\in F$. Par définition de la projection sur F parallèlement à F, on aura alors $p(u)=u_F=(x+y-z,2y-z,2y-z)$. De même, $s(u)=u_F-u_G=(x+2y-2z,3y-2z,4y-3z)$. Alternativement, on utilise le fait que $s=2p-\mathrm{id}$ pour ce dernier calcul.

4. (a) Calculons donc $q^2(x,y,z) = (x+y-z+y-y,y,y) = (x+y-z,y,y) = q(x,y,z)$, donc $q^2 = q$ et q est bien un projecteur.

   (b) Le système à résoudre est vraiment idiot : $x+y-z=y=0$, donc $x=z$ et $y=0$, donc on déduit $\ker(q) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.

   (c) Les dimensions collent puisque $\ker(q)$ est de dimension 1, il suffit alors de vérifier que l'intersection est réduite à 0, c'est-à-dire que $(1,0,1) \notin F$. En effet, en supposant $(1,0,1) = a(1,0,0)+b(0,1,1)$, on obtient immédiatement $a=b=1$ et en même temps $b=0$, ce qui pose évidemment problème.

   (d) En utilisant la méthode habituelle, $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Vect}((1,0,0);(1,1,1);(1,0,0))$. Bien évidemment, on peut enlever le dernier vecteur, et remplacer le deuxième par $(1,1,1)-(1,0,0) = (0,1,1)$. On retombe alors exactement sur la définition de F.

   (e) Si $u \in \ker(q)$, alors $p \circ q(u) = q(u) = 0$ (c'est évident !). Si $u \in \mathrm{Im}(q) = F$, alors $q(x) = x$ (puisque q est un projecteur), et $p \circ q(x) = p(x) = x$ puisque p est lui-même un projecteur d'image F. Les applications linéaires $p \circ q$ et q coïncident donc sur les sous-espaces vectoriels F et $\ker(q)$. Commes ces sous-espaces sont supplémentaires, cette égalité restera valable sur E tout entier. Le raisonnement est exactement le même pour prouver que $q \circ p = p$.

5. (a) Calculons pour changer $r^2 = (p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p+q+p+q = 2r$ en utilisant la question précédente et le fait que p et q sont des projecteurs. Puisque $r^2 \neq r$, r n'est pas un projecteur.

   (b) On peut commencer par calculer $r^3 = r^2 \circ r = 2r \circ r = 2r^2 = 4r$. On peut conjecturer que $r^n = 2^{n-1}r$, ce qui se prouve par une récurrence triviale : c'est vrai au rang 2 et si on le suppose au rang n, alors $r^{n+1} = r^n \circ r = 2^{n-1}r^2 = 2^n r$.

   (c) Supposons qu'un vecteur u appartienne à l'image de $r - 2\,\mathrm{id}$, alors par définition $u = r(v) - 2v$ pour un certain vecteur v. On peut alors calculer $r(u) = r^2(v) - 2r(v) = 0$ puisque $r^2 = 2r$. Mais cela prouve que $u \in \ker(r)$, et donc que $\mathrm{Im}(r - 2\,\mathrm{id}) \subset \ker(r)$. C'est la même chose dans l'autre sens : si $u = r(v)$, alors $(r - 2\,\mathrm{id})(u) = r^2(v) - 2r(v) = 0$.

   (d) Il est évident que ces deux sous-espaces ont une intersection réduite au vecteur nul : si $r(u) = r(u) - 2u = 0$, alors $u = 0$. De plus, on peut toujours écrire $u = u - \dfrac{r(u)}{2} + \dfrac{r(u)}{2}$. Dans cette décomposition, $\dfrac{r(u)}{2} = r\left(\dfrac{u}{2}\right) \in \mathrm{Im}(r) \subset \ker(r - 2\,\mathrm{id})$, et $u - \dfrac{r(u)}{2} = -\dfrac{1}{2}(r(u) - 2u) \in \mathrm{Im}(r - 2\,\mathrm{id}) \subset \ker(u)$. On a donc prouvé que $u \in \ker(r - 2\,\mathrm{id}) + \ker(r)$, et donc que cette somme est égale à E tout entier. Pour une fois, nous avons prouvé en revenant à la définition que les deux sous-espaces sont supplémentaires !

   (e) D'après la question précédente, où on a déjà décomposé un vecteur u sous la forme $u - \dfrac{1}{2}r(u) + \dfrac{1}{2}r(u)$, cette projection est définie par $h(u) = u - \dfrac{1}{2}r(u)$. Comme $r(x,y,z) = p(x,y,z) + q(x,y,z) = (2x+2y-2z, 3y-z, 3y-z)$, on peut écrire plus explicitement $h(x,y,z) = \left(z-y, \dfrac{z-y}{2}, \dfrac{3(z-y)}{2}\right)$.