Devoir Surveillé n°8

PTSI B Lycée Eiffel

13 mai 2017

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^4$, et on considère les quatre vecteurs $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (1,0,0,-1)$ et $(1,1,-1,0)$.

1. Prouver que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$, montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
3. On définit une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ par $f(x,y,z,t) = (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0)$.
   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de f (on en donnera une base), puis vérifier que $\ker(f) = G$.
   (c) Déterminer l'image de f, puis vérifier que $\text{Im}(f) = F$.
   (d) Montrer que $f^2 = 2f$, et décrire f comme composée de deux applications linéaires classiques étudiées en cours.
   (e) Déduire du résultat précédent la nature de l'application $g = f - \text{id}$, et en préciser les éléments caractéristiques.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2+1)y' - xy = 1 + x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E). Comme ce n'est pas le thème du DS de cette semaine, je donne la réponse $y_h(x) = K\sqrt{1+x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer une fonction affine g solution de (E). En déduire l'ensemble des solutions de E. On notera pour la suite y_K la solution de E de la forme $g(x) + K\sqrt{x^2+1}$, et $\mathcal{C}_K$ la courbe représentative correspondante.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_K$ en son point d'abscisse 1.
4. Prouver que toutes les tangentes calculées ci-dessus se coupent en un même point lorsque K parcourt $\mathbb{R}$.
5. (a) Rappeler le DL à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$ en 0, puis calculer celui de $\sqrt{1 + x + \dfrac{x^2}{2}}$.
   (b) Calculer un DL à l'ordre 2 en 1 (et pas en 0 !) de y_K (on pourra poser $x = 1 + h$ pour se ramener à une variable tendant vers 0).
   (c) En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_K$ et de sa tangente en 1 (en fonction de K) au voisinage de 1.
6. Déterminer un développement asymptotique de y_K en $+\infty$, et en déduire l'existence éventuelle d'asymptotes obliques pour les courbes $\mathcal{C}_K$ en $+\infty$. Que se passe-t-il en $-\infty$?
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ tenant compte de tous les calculs effectués précédement.

Exercice 3

On effectue une succession de lancers d'une même pièce truquée, qui tombe sur Pile avec probabilité $\frac{1}{4}$ et sur Face avec probabilité $\frac{3}{4}$. Les résultats des différents lancers sont bien entendu indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne deux Piles aux deux premiers lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un Face puis deux Piles lors des trois premiers lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux Piles et deux Faces lors des quatre premiers lancers ?
4. On suppose que les trois premiers lancers ont donné un Pile et deux Faces (pas forcément dans cet ordre). Quelle est la probabilité que le Pile ait été obtenu au deuxième lancer ? Interpréter le résultat obtenu.
5. On suppose maintenant qu'on a obtenu au moins un Pile lors des trois premiers lancers, quelles est la probabilité que le deuxième lancer ait donné un Pile ?
6. On note désormais A_n l'événement : « On obtient **pour la première fois** deux Piles successifs aux lancers numéro $n-1$ et n ». On note p_n la probabilité de l'événement A_n.
   (a) Préciser les valeurs de p_2, p_3 et p_4.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $p_{n+2} = \frac{3}{4}p_{n+1} + \frac{3}{16}p_n$.
   (c) Déterminer p_n en fonction de n.
   (d) Calculer $\sum_{k=2}^{n} p_k$, puis la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 4

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, où on considère les sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z - 2y = 0\}$.

1. Donner une base de chacun des sous-espaces vectoriels F et G.
2. Prouver que $F \oplus G = E$.
3. On note p la projection sur F parallèlement à G. Donner l'expression explicite de $p(x, y, z)$ (cette expression n'est pas nécessaire pour la suite de l'exercice). Donner également l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G (en effectuant le moins possible de calculs supplémentaires).
4. On note q l'endomorphisme de E (on ne demande pas de vérifier que c'en est un) défini par $q(x, y, z) = (x + y - z, y, y)$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Donner une base de $\ker(q)$.
   (c) Vérifier que $\ker(q)$ est un supplémentaire de G.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$.
   (e) En déduire (sans calculs barbares si possible !) que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
5. On note désormais $r = p + q$.
   (a) L'application r est-elle une projection ?
   (b) Calculer r^n pour tout entier $n \geq 2$ (on exprimera le résultat en fonction de r).
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(r - 2\,\mathrm{id}) \subset \ker(r)$ et que $\mathrm{Im}(r) \subset \ker(r - 2\,\mathrm{id})$.
   (d) Montrer que $\ker(r)$ et $\ker(r - 2\,\mathrm{id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
   (e) Donner l'expression de la projection h sur $\ker(r)$ parallèlement à $\ker(r - 2\,\mathrm{id})$.