Devoir Surveillé n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 mars 2017

Durée : 1H50. Calculatrices interdites.

Exercice 1

1. Le polynôme dérivé $P' = 3X^2 - 2X - \frac{39}{4}$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 3 \times 39 = 121 = 11^2$, et admet pour racines $X_1 = \frac{2-11}{6} = -\frac{3}{2}$, et $X_2 = \frac{2+11}{6} = \frac{13}{6}$. Vérifions si l'une de ces deux racines est aussi racine de P (et donc racine double de P) : $P\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{117}{8} - 9 = \frac{-27 - 18 + 117 - 72}{8} = 0$. On a donc trouvé notre racine double. Le polynôme P étant de degré 3, il admet une autre racine qu'on peut par exemple déterminer à l'aide des relations coefficients-racines : le produit des trois racines (comptées avec multiplicité) est égal à 9. En notant α la dernière racine, on a donc $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \times \alpha = 9$, donc $\alpha = 9 \times \frac{4}{9} = 4$. Le polynôme P étant unitaire, il se factorise donc sous la forme $P = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 (X - 4)$.

2. Notons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ le polynôme unitaire de degré 3 ayant x, y et z pour racines. En exploitant les relations coefficients-racines, on sait que $a = -(x + y + z) = -2$, et $c = -xyz = \frac{1}{2}$. De plus, en mettant tout au même dénominateur, la dernière équation disponible peut s'écrire $\frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{1}{2}$, dont on déduit que $b = xy + xz + yz = \frac{xyz}{2} = -\frac{1}{4}$. Autrement dit, $P = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$. On constate que 2 est une racine évidente de ce polynôme : $P(2) = 8 - 8 - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 0$. On peut donc factoriser P sous la forme $X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2} = (X-2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (c - 2b)X - 2c$. Une rapide identification donne $a = 1$, puis $b - 2a = -2$, donc $b = 0$, et enfin $c - 2b = -\frac{1}{4}$, soit $c = -\frac{1}{4}$, ce qui est cohérent avec la dernière équation. Le deuxième facteur obtenu, $X^2 - \frac{1}{4}$, a pour racines triviales $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. On a donc $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$, mais on ne connait pas l'ordre des trois inconnues. Si on

veut être rigoureux, il faut donc donner les six triplets solutions possibles : $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right), \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right), \left(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$.

Exercice 2

1. Calculons donc $I_0 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
2. En effet, par linéarité de l'intégrale, $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$. On en déduit immédiatement que $I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
3. C'est à peu près la même chose que ci-dessus : par linéarité, $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x} + e^{-nx}}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^x+1)}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \frac{-e^{-n}+1}{n}$.
4. On peut utiliser la méthode classique : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1-e^x)}{1+e^x}\,dx$ (même calcul et factorisation qu'à la question précédente). Or, e^{-nx} et $1+e^x$ sont toujours positifs, et $1-e^x$ est négatif lorsque x varie dans l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$, donc la suite (I_n) est décroissante. Comme elle est trivialement minorée par 0 puisque I_n est une intégrale de fonction positive, elle converge donc.
5. Le plus simple est de dire que $0 \leq 2I_n \leq I_n + I_{n-1}$ (puisque la suite est décroissante, $I_n \leq I_{n-1}$), soit en utilisant le calcul de la question 3, $0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-n+1}}{2n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n+1}}{2n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer directement que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -4 \\ 3 & -6 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On peut prouver facilement que F est un sous-espace vectoriel de E sans se lancer dans des calculs délirants, soit en constatant que F peut facilement être décrit comme ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes sur les coefficients des matrices, soit en revenant vraiment à la définition (on a évidemment $0 \times M = M \times 0$, et si $AM = MA$, alors $\lambda AM = \lambda MA$ et en supposant de plus $AN = NA$, alors $A(N+M) = AN + AM = MA + NA = (M+N)A$). Mais comme on nous demande une base de F, il va bien falloir écrire et surtout résoudre le système correspondant. Allez, un peu de courage ! En notant de a à i les coefficients de la matrice inconnue M, on calcule d'abord $AM = \begin{pmatrix} 5a-10d-4g & 5b-10e-4h & 5c-10f-4i \\ 3a-6d-2g & 3b-6e-2h & 3c-6f-2i \\ -3a+5d+g & -3b+5e+h & -3c+5f+i \end{pmatrix}$, et $MA =$

$\begin{pmatrix} 5a+3b-3c & -10a-6b+5c & -4a-2b+c \\ 5d+3e-3f & -10d-6e+5f & -4d-2e+f \\ 5g+3h-3i & -10g-6h+5i & -4g-2h+i \end{pmatrix}$. On se ramène alors à la résolution du magnifique système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & 3b & - & 3c & + & 10d & + & 4g & = & 0 \\ 10a & + & 11b & - & 5c & - & 10e & - & 4h & = & 0 \\ 4a & + & 2b & + & 4c & - & 10f & - & 4i & = & 0 \\ 3a & - & 11d & - & 3e & + & 3f & - & 2g & = & 0 \\ & & 3b & + & 10d & - & 5f & - & 2h & = & 0 \\ 3c & + & 4d & + & 2e & - & 7f & - & 2i & = & 0 \\ 3a & - & 5d & + & 4g & + & 3h & - & 3i & = & 0 \\ 3b & - & 5e & - & 10g & - & 7h & + & 5i & = & 0 \\ & & 3c & - & 5f & - & 4g & - & 2h & = & 0 \end{array}\right.$.

On va essayer d'exprimer les inconnues e, g, h et i en fonction des inconnues a, b, c, d et f (comme ça on n'aura plus que cinq inconnues dans les équations restantes, et puis bon je triche un peu car je sais quelle dimension ça doit donner à la fin). La première équation donne $g = -\frac{3}{4}b + \frac{3}{4}c - \frac{5}{2}d$, la troisième donne $i = a + \frac{1}{2}b + c - \frac{5}{2}f$, la cinquième donne $h = \frac{3}{2}b + 5d - \frac{5}{2}f$. En reprenant les équations restantes dans l'ordre, la deuxième permet d'exprimer $e = a + \frac{11}{10}b - \frac{1}{2}c - \frac{2}{5}h = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c - 2d + f$. Remplaçons allègrement tout dans la quatrième équation : $3a - 11d - 3e + 3f - 2g = 3a - 11d - 3a - \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c + 6d - 3f + 3f + \frac{3}{2}b - \frac{3}{2}c + 5d = 0$ (mais oui, tout s'annule !) donc cette équation est toujours vérifiée, on peut la supprimer. Passons alors à la sixième équation : $3c + 4d + 2e - 7f - 2i = 3c + 4d + 2a + b - c - 4d + 2f - 7f - 2a - b - 2c + 5f = 0$, encore une équation en moins. Enchainons donc avec la septième : $3a - 5d + 4g + 3h - 3i = 3a - 5d - 3b + 3c - 10d + \frac{9}{2}b + 15d - \frac{15}{2}f - 3a - \frac{3}{2}b - 3c + \frac{15}{2}f = 0$, décidément quelle chance ! Allez, la huitième : $3b - 5e - 10g - 7h + 5i = 3b - 5a - \frac{5}{2}b + \frac{5}{2}c + 10d - 5f + \frac{15}{2}b - \frac{15}{2}c + 25d - \frac{21}{2}b - 35d + \frac{35}{2}f + 5a + \frac{5}{2}b + 5c - \frac{25}{2}f = 0$. On n'y croyait pas vraiment mais pourtant ça marche aussi ! Et enfin la dernière, plus facile : $3c - 5f - 4g - 2h = 3c - 5f + 3b - 3c + 10d - 3b - 10d + 5f = 0$. Là encore, l'équation est inutile. Finalement, il ne nous reste que les quatre équations ayant été exploitées initialement, ce qui signifie qu'on peut choisir les coefficients a, b, c, d et f de notre matrice comme on le veut. Autrement dit, F est un sous-espace vectoriel de dimension 5 de E. On peut obtenir facilement une base de F en fixant successivement $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ et $f = 1$ (et à chaque fois les quatre coefficients égaux à 0, et les derniers déterminés par les relations obtenues plus haut), ce qui donne une base constituée des cinq matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 5 & 0 \end{pmatrix}$; et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Les coordonnées de la matrice A dans cette base sont tout bêtement $(5, -10, -4, 3, -2)$ (elles sont trivialement imposées par les valeurs des coefficients a, b, c, d et f).

2. Avec les notations imposées par l'énoncé, la condition $AX = -X$ est équivalente

au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 10y & - & 4z & = & -x \\ 3x & - & 6y & - & 2z & = & -y \\ -3x & + & 5y & + & z & = & -z \end{array}\right.$ Quitte à la diviser par 2, la première équation $3x - 5y - 2z = 0$ est la même que la deuxième, mais aussi que la troisième (au signe près) ! On peut donc garder l'unique condition $z = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y$, ou encore écrire que $G_1 = \mathrm{Vect}((2,0,3);(0,2,-5))$. En particulier, G_1 est bien un sous-espace vectoriel de E, de dimension 2.

3. On se ramène de même au système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 10y & - & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 8y & - & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.
   Les opérations $L_2 - L_1$ et $L_1 + L_3$ donnent les équations $2y + 2z = 0$ et $-5y - 5z = 0$, qui sont manifestement équivalentes. On garde donc $z = -y$, et en reportant dans la première équation du système, $3x - 6y = 0$, soit $x = 2y$. On en déduit que $G_2 = \mathrm{Vect}((2,1,-1))$, et G_2 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
4. On a déjà justifié le fait que $\dim(G_1) + \dim(G_2) = 2 + 1 = 3 = \dim(E)$, il suffit donc de prouver que $G_1 \cap G_2 = \{0\}$ pour conclure. Or, si un vecteur (x, y, z) appartient à la fois à G_1 et à G_2, par définition, la matrice colonne X correspondante vérifie à la fois $AX = -X$ et $AX = 2X$, donc $2X = -X$, ce qui n'est possible que si $x = y = z = 0$, ce qui conclut la démonstration.
5. On va donc poser $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Pour déterminer son inverse éventuel, cherchons à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & 2z & = & a \\ & & 2y & + & z & = & b \\ 3x & - & 5y & - & z & = & c \end{array}\right.$. Les deux premières équations donnent immédiatement $x = \frac{a}{2} - z$ et $y = \frac{b}{2} - \frac{z}{2}$. On reporte dans la dernière équation : $\frac{3}{2}a - 3z - \frac{5}{2}b + \frac{5}{2}z - z = c$, soit $-\frac{3}{2}z = -\frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b + c$, et donc $z = a - \frac{5}{3}b - \frac{2}{3}c$. On en déduit ensuite $x = -\frac{1}{2}a + \frac{5}{3}b + \frac{2}{3}c$ et $y = -\frac{1}{2}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$. Le système est un système de Cramer, donc la matrice P est inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
6. Le résultat du calcul intermédiaire dépend bien entendu du choix de la matrice P, mais le résultat final, lui, doit toujours être le même (éventuellement à l'ordre des coefficients diagonaux près), et en tout cas toujours donner une matrice diagonale. Avec mon choix de matrice P on calcule $AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.