

Devoir Surveillé n°7

PTSI B Lycée Eiffel

28 mars 2017

Durée : 1H50. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes :

1. Factoriser le polynôme $P = X^3 - X^2 - \frac{39}{4}X - 9$ sachant qu'il admet une racine double.

2. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xyz = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 (on pourra trouver un po-

lynôme de degré trois dont x , y et z sont racines et en déterminer une racine évidente).

Exercice 2

On cherche à étudier la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x} dx$.

1. Calculer I_0 .
2. Montrer que $I_0 + I_1 = 1$ et en déduire la valeur de I_1 .
3. Calculer plus généralement la valeur de $I_n + I_{n+1}$.
4. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) , et en déduire sa convergence.
5. À l'aide des deux questions précédentes, prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -4 \\ 3 & -6 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $F = \{M \in E \mid AM = MA\}$, vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E dont on donnera une base et dont on précisera la dimension. Déterminer les coordonnées de la matrice A (qui appartient évidemment à F) dans la base de F que vous avez obtenue. Cette première question est indépendante de la suite de l'exercice.
2. On note $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3 \mid A \times X = -X\}$, où on a noté X la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Vérifier que G_1 est un sous-espace vectoriel non vide de \mathbb{R}_3 (on en donnera une base).
3. Même question pour $G_2 = \{(x, y, z) \mid AX = 2X\}$ (avec les mêmes notations).
4. Montrer que G_1 et G_2 sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
5. On note P la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs constituant les bases de G_1 et de G_2 (peu importe l'ordre, mais vous devriez avoir trois vecteurs au total, donc une matrice P qui est carrée). Vérifiez que P est une matrice inversible et calculez P^{-1} .
6. Calculer $P^{-1}AP$.