Devoir Surveillé n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

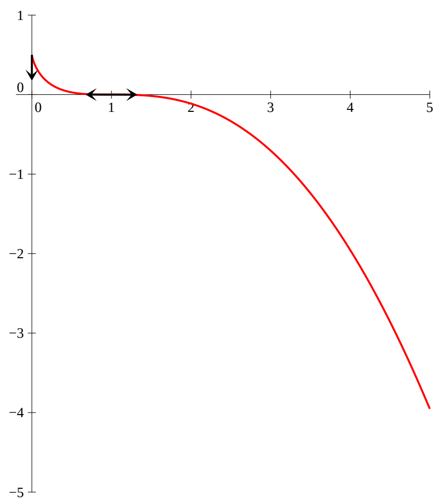
7 mars 2017

Exercice 1

1. La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1}{2}$, et on peut prolonger la fonction g par continuité en 0. Tant qu'on y est, intéressons-nous au taux d'accroissement de la fonction g en 0 : $\tau_0(h) = \dfrac{g(h)-\frac{1}{2}}{h} = \dfrac{h\ln(h)-\frac{h^2}{2}}{h} = \ln(h) - \dfrac{h}{2}$. On obtient donc $\lim\limits_{h\to 0}\tau_0(h) = -\infty$, ce qui prouve que la fonction prolongée n'est pas dérivable en 0, mais qua la courbe de g admettra une tangente verticale en 0. Pour obtenir la limite de de g en $+\infty$, on peut par exemple tout factoriser par $x\ln(x)$: $g(x) = x\ln(x)\left(1 - \dfrac{x}{2\ln(x)} + \dfrac{1}{2x\ln(x)}\right)$. Toujours par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2\ln(x)} = +\infty$, dont on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Restent à étudier les variations de la fonction : $g'(x) = \ln(x) + 1 - x$, fonction dont le signe n'est pas évident. Dérivons donc une fois de plus : $g''(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, donc g' est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. En particulier, la dérivée g' admet pour maximum $g'(1) = 0$, donc elle est toujours négative sur $]0,+\infty[$ (mais s'annule tout de même pour $x = 1$). On peut alors dresser le tableau de variations suivant pour la fonction g :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
f	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$

Et on conclut avec une petite courbe :



2. Lorsque $x > 1$, $x^2 - 1 > 0$, et l'inégalité $f(x) < \dfrac{1}{2}$ est donc équivalente à $x\ln(x) < \dfrac{x^2-1}{2}$, c'est-à-dire à $g(x) < 0$. Or, la fonction g est bien strictement négative sur tout l'intervalle $]1, +\infty[$, ce qui prouve donc l'inégalité de droite de l'encadrement demandé. L'inégalité de gauche est évidente puisque sur l'intervalle considéré, $\ln(x) > 0$ et $x^2 - 1 > 0$.

3. Calculons donc $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\frac{1}{x}\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}-1} = \dfrac{-\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{1-x^2}{x^2}} = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1} = f(x)$. Or, quand $x \in]0,1[$, $\dfrac{1}{x} \in]1, +\infty[$, et la question précedente assure alors que $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

4. On peut écrire $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \times \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. Le deuxième quotient a une limite égale à 1 lorsque x tend vers 1 (limite classique issue du taux d'accroissement de la fonction ln), donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$. La fonction f est prolongeable par continuité. Pour la dérivabilité, il faut s'intéresser au taux d'accroissement $\tau_1(h) = \dfrac{\frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} - \frac{1}{2}}{h} = \dfrac{2(1+h)\ln(1+h) - 2h - h^2}{4h^2 + 2h^3}$. Cette limite n'est pas évidente à calculer avec les moyens dont nous disposons actuellement. On peut presque s'en sortir avec un développement limité à l'ordre 1 du ln : on peut écrire que $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, pour obtenir $\tau_1(h) = \dfrac{h^2 + (2h + 2h^2)\varepsilon(h)}{2h^2(2+h)}$, mais la deuxième partie du numérateur pose problème. En fait, un développement limité à l'ordre 2 fonctionne mieux : $\ln(1+h) \simeq h - \dfrac{1}{2}h^2$ (je n'écris pas le reste qui va de toute façon donner un terme qui va tendre vers 0 une fois divisé par h^2), pour obtenir cette fois-ci $\tau_1(h) \simeq \dfrac{2(1+h)(h - \frac{1}{2}h^2) - 2h - h^2}{2h^2(2+h)} = \dfrac{2h - h^2 + 2h^2 - h^3 - 2h - h^2}{2h^2(2+h)}$. Au numérateur, tous les termes en h et en h^2 se simplifient et ce qui reste va toujours donner une limite nulle quand on le divise par h^2. La fonction f est donc dérivable en 1, et on aura une tangente horizontale à la courbe en son point d'abscisse 1.

Exercice 2

1. Il faut simplement choisir, parmi les $2n$ chiffres formant le nombre, à quels emplacements vont se trouver les n zéros (les uns complétant les emplacements restants), donc choisir n emplacement parmi les $2n$ disponibles. Il y a donc $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$ nombres convenables.

2. Le seul mot de Dyck de longueur 2 est 10, donc $c_1 = 1$. Il y a deux mots de Dyck de longueur 4 : 1100 et 1010, donc $c_2 = 2$. On en a cinq pour la longueur 6 : 111000, 110100, 110010, 101100 et 101010, donc $c_3 = 5$. Enfin, on devrait arriver à prouver que $c_5 = 14$ (au pire en allant jeter un oeil sur les question suivantes), voisi la liste des mots correspondants : 11110000, 11101000, 11100100, 11100010, 11011000, 11010100, 11010010, 11001100, 11001010, 10111000, 10110100, 10110010, 10101100, 10101010.

3. Soit D_n l'ensemble de mots de Dyck de longueur $2n$ (qui sont donc par définition en nombre c_n). Pour un mot appartenant à D_n, on va noter k le plus petit entier k pour lequel le sous-mot constitué des $2k$ premiers chiffres de notre mot contient autant de 0 que de 1 (donc k zéros et k uns). Notons qu'un tel entier cas existe puisqu'au pire, la propriété est nécessairement vérifiée lorsque $k = n$. On note E_k le sous-ensemble de D_n pour lequel cet entier est égal à k. Par exemple, lorsque $n = 4$, le mot 11100010 appartient à E_3, et le mot 10110010 appartient à E_1 (comme tous les mots commençant par 10). L'ensemble D_n est clairement la réunion disjointe des sous-ensembles E_k, donc $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |E_k|$. Si $k = n$, le mot commence par un 1 et

finit par un 0, et comme il n'y a jamais autant de 1 que de 0 dans les sous-mots de notre mot (sinon k serait strictement inférieur à n), le mot obtenu en supprimant le premier 1 et le dernier 0 est lui-même un mot de Dyck (on a toujours strictement plus de 1 que de 0 dans le mot complet, donc on garde un nombre de uns supérieur ou égal au nombre de zéros en supprimant le premier un) de longueur $2n-2$. Réciproquement, tout mot de Dyck de longueur $2n-2$ auquel on ajoute un 1 au début et un 0 à la fin donnera un mot de Dyck appartenant à E_n (puisque tout sous-mot aura strictement plus de uns que de zéros avec le un qu'on a ajouté au début). Conclusion : $|E_n| = c_{n-1}$.

Maintenant, si $k \neq n$, on peut découper les mots de l'ensemble E_k en deux sous-mots de longueur $2k$ et $2n-2k$ appartenant respectivement à E_{k-1} (c'est le même argument que ci-dessus, pusiqu'on a en permanence strictement plus de uns que de zéros dans la première moitié du mot), et à D_{n-k} (il y a autant de zéros que de uns sur la deuxième moitié du mot puisque c'est le cas sur la première moitié, et la condition des mots de Dyck reste là aussi vérifiée, sinon elle ne le serait pas sur le mot tout entier). Réciproquement, tout mot obtenu en mettant bout à bout un mot de E_{k-1} et un autre de D_{n-k} convient, donc $|E_k| = c_{k-1}c_{n-k}$.

Conclusion : $c_n = c_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{k-1}c_{n-k}$, ce qui correspond exactement à la formule demandant en acceptant de convenir que $c_0 = 1$.

On peut alors calculer $c_5 = \sum_{k=1}^{5} c_{k-1}c^{5-k} = c_0c_4+c_1c_3+c_2^2+c_3c_1+c_4c_0 = 2\times14+2\times5+2^2 = 42$.

Mais oui, la réponse est 42.

4. On va essayer de compter les mots de longueur $2n$ contenant exactement n uns et n zéros qui ne sont PAS des mots de Dyck. Pour un tel mot, on regarde quel est le premier 0 dans le mot qui brise la condition de Dyck (donc pour lequel on se retrouve avec strictement plus de zéros que de uns, c'est-à-dire nécessaireme exactement un zéro de plus que de uns), et modifions tous les chiffres suivant ce 0 (tous les 1 deviennent des 0 et vice-versa). On a modifié un 1 de plus que de zéros (puisqu'il y avait un zéro de plus que de un juste avant qu'on ne modifie), et le mot ainsi obtenu va donc contenir $n+1$ zéros et $n-1$ uns. Réciproquement, tout mot de longuer $2n$ contenant $n+1$ zéros et $n-1$ uns peut être obtenu par ce procédé de manière unique (le procédé est facilement réversible). Or, il y a exactement $\binom{2n}{n+1}$ mots de longueur $2n$ contenant exactement $n+1$ zéros, donc $\binom{2n}{n+1}$ mots de longueur $2n$ contenant autant de zéros que de uns qui ne sont pas des mots de Dyck. Par passe au complémentaire et en exploitant la première question de l'exercice, on a donc $c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!^2} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!^2} - \frac{(2n)! \times n}{(n+1)n! \times n!} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \times \binom{2n}{n} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \times \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. On peut en passant confirmer que $c_5 = \frac{1}{6} \times \binom{10}{5} = \frac{1}{6} \times 252 = 42$.

5. Si on note « un » chaque déplacement vers le Nord-Est et « zéro » chaque déplacement vers le Sud-Est, un tel chamin va être constitué de n uns et n zéros, et si on ne veut jamais repasser sous l'axe des abscisses, chaque sous-chemin devra contenir plus de déplacements vers le Nord-Est que de déplacément vers le Sud-Est (au sens large), donc plus de uns que de zéros. C'est exactement la condition de mots de Dyck, il y a donc exactement c_n tels chemins.

6. Les chemins ne retouchant pas l'axe des abscisses sont exactement ceux obtenus à partis des chemins de la question précédente de longueur $2n-2$ (donc aboutissant au point de coordonnées $(2n-2, 0)$), auquel on ajouté un 1 au début et un 0 à la fin (c'est le raisonnement qu'on a utilisé plein de fois à la question 3), il y a en a donc c_{n-1}, soit $\frac{1}{n} \times \binom{2n-2}{n-1}$.

Exercice 3

1. On peut bien sûr faire un pivot de Gauss (en citant la méthode utilisée), mais je préfère comme toujours revenir au système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & - & z & = & a \\ x & + & y & + & 2z & = & b \\ & & y & & & = & c \end{array}\right.$ se résout assez trivialement : on a déjà $y = c$, et $x = -a - z$, en remplaçant dans la deuxième équation on obtient donc $-a - z + c + 2z = b$, soit $z = a + b - c$, puis $x = -2a - b + c$. Autrement dit, la matrice P est bien inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Calculons donc $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ (incroyable, la matrice D est diagonale !).

3. On va procéder par récurrence. En multipliant l'égalité $P^{-1}AP = D$ à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient $A = PDP^{-1}$, ce qui prouve la propriété au rang 1. Elle est aussi valable au rang 0, puisque $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$. Supposons-là vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et conclut la récurrence.

4. Il suffit donc de calcule le produit PD^nP^{-1}, sachant que, la matrice D étant diagonale, on aura $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit $PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ (-1)^n & 8^n & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 2(-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 8^n + (-1)^n \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$.

5. Soit par un calcul direct, soit en utilisant la formule de la question précédente, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 65 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 511 \\ 0 & 0 & 512 \end{pmatrix}$. Si on recherche une relation de la forme $A^3 = aA^2 + bA$, les deux premiers coefficients de la première ligne imposent $-2 = 2a - 2b$ et $-1 = a - b$. Ah, pas de pot, ça donne deux fois la même condition $a = b - 1$. En fait, seuls les deux derniers coefficients de la dernière colonne vont donner des conditions différentes : $511 = 65a + 7b = 65a + 7(a + 1) = 72a + 7$, donc $72a = 504$ et $a = 7$, ce qui donne $b = 8$ et fonctionne pour le dernier coefficient. Bref, $A^3 = 7A^2 + 8A$. En passant tout à gauche et en factorisant par A, on a donc $A(A^2 - 7A - 8I) = 0$. Si la matrice A était inversible, on pourrait multiplier par A^{-1} pour en déduire que $A^2 - 7A - 8I = 0$, soit $A^2 = 7A + 8I$, ce qui n'est pas vrai (ça ne marche même pas pour le premier coefficient). Par l'absurde, on en déduit que la matrice A n'est pas inversible.

6. Si la matrice N est diagonale, en notant x, y et z ses coefficients diagonaux, l'égalité $N^3 = D$ se résume aux trois conditions $x^3 = -1$, $y^3 = 8$ et $z^3 = 0$. Chacune de ces équations a une solution unique : $x = -1$, $y = 2$ et $z = 0$. L'unique matrice N solution est donc $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. (a) On calcule simplement $(P^{-1}MP)^3 = P^{-1}M^3P$, donc $(P^{-1}MP)^3 = D \Leftrightarrow P^{-1}M^3P = D \Leftrightarrow M^3 = PDP^{-1} = A$ en multipliant à gauche par P et à droite P^{-1}.

   (b) En posant $N = P^{-1}MP$, la question précédente assure que $N^3 = D$, donc N est la matrice calculée à la question 6. Or, on aura $M = PNP^{-1}$ (toujours le même calcul), donc il existe une unique solution M qu'on n'a plus qu'à calculer : $PN = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est la seule matrice dont le cube est égal à A.

(c) Si on applique la même méthode, on va commencer par chercher des matrices N vérifiant $N^2 = D$. Si on admet que ces matrices doivent être diagonales, on va etre confrontés à un problème puisque l'équation $x^2 = -1$ obtenue pour le premier coefficient diagonal n'aura pas de solution réelle. Il n'y a donc pas de matrice N convenable, et par conséquent pas de solution à l'équation $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1. (a) Un demi-point de donné : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$.

(b) La question précédente permet de prouver que $x^2 - x + 1$ est toujours positif (bon, on n'en avait pas vraiment besoin pour ça), donc f est définie sur $\mathbb{R}$. La suite (u_n) est alors bien définie par récurrence triviale (il n'y a absolument rien à faire pour l'hérédité !).

(c) On peut par exemple procéder par encadrement en utilisant la première question : si $0 \leq x \leq 1$, alors $-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, donc $0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, puis $\frac{3}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 1$, donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq f(x) \leq 1$, et $f(x) \in [0,1]$ et l'intervalle est bien stable par f.

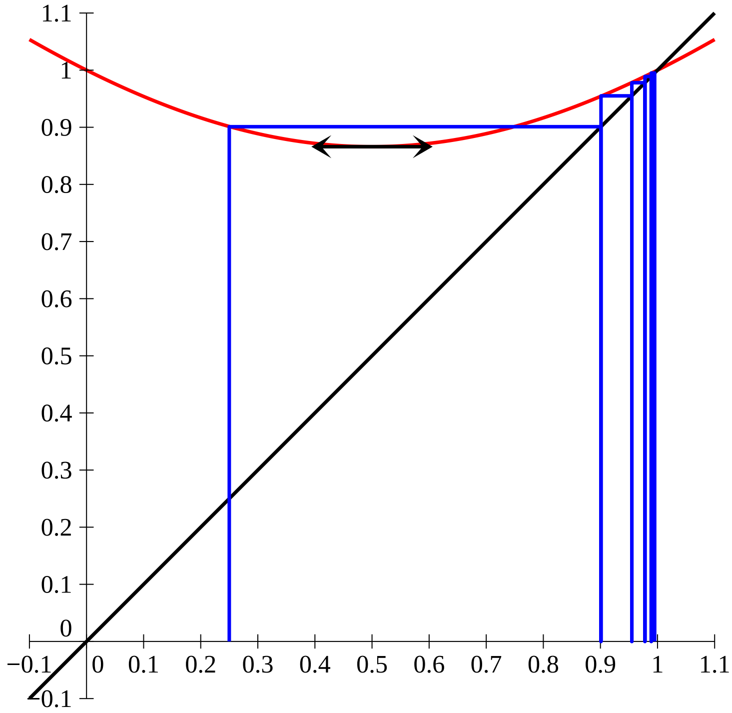
(d) C'est encore une récurrence triviale : c'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si $u_n \in [0,1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ d'après la question précédente.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui est dans la racine carrée ne s'annule jamais), et $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$. Cette dérivée est du signe de $2x - 1$, et f admet en particulier un minimum de valeur $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$ (limite du terme de plus haut degré), on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, et le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$

(b) On calcule $f(x) - x = \sqrt{x^2 - x + 1} - x = \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$ en multipliant par la quantité conjuguée. Sur l'intervalle $[0,1]$, le dénominateur est positif, et le numérateur aussi (il s'annule simplement pour $x = 1$), donc $f(x) \geq x$ sur tout l'intervalle, avec un point fixe pour $x = 1$.

(c) Voici une courbe :



(d) Plusieurs façons de faire qui peuvent donner des résultats différents. Première méthode, on exploite la toute première question pour dire que, quel que soit le réel x, $\sqrt{x^2-x+1} \geq \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. De plus, quand $x \in [0,1]$, $-1 \leq 2x-1 \leq 1$, donc $|2x-1| \leq 1$. On en déduit que $|f'(x)| = \dfrac{|2x-1|}{2\sqrt{x^2-x+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. C'est un majorant tout à fait convenable puisqu'il est strictement inférieur à 1, mais on peut obtenir mieux en dérivant une seconde fois : $f''(x) = \dfrac{4\sqrt{x^2-x+1} - (2x-1) \times \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}}{4(x^2-x+1)} = \dfrac{4(x^2-x+1)-(2x-1)^2}{4(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{4(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}}$. La dérivée seconde étant toujours positive, f' est croissante. On peut donc calculer $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ pour conclure que $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

3. (a) Il suffit d'appliquer l'IAF entre 1 et u_n (qui appartiennent tous les deux à l'intervalle $[0,1]$ en utilisant la majoration de la question précédente, pour obtenir $|f(1)-f(u_n)| \leq k|1-u_n|$, soit $|1-u_{n+1}| \leq k|1-u_n|$, où $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $k = \dfrac{1}{2}$ selon le calcul effectué.

(b) On va prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|1-u_n| \leq k^n|1-u_0|$. L'inégalité est triviale au rang 0, et si on la suppose vraie au rang n, alors en utilisant la question précédente, $|1-u_{n+1}| \leq k|1-u_n| \leq k \times k^n|1-u_0| = k^{n+1}|1-u_0|$, ce qui achève la récurrence. Remarquons en passant que, puisque $u_0 \in [0,1]$, on a $|1-u_0| \leq 1$, et donc $|1-u_n| \leq k^n$.

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ et $0 \leq |1-u_n|$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |1-u_n| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(d) L'entier n_0 conviendra certainement si $k^{n_0} \leq 10^{-2}$, donc si $\left(\dfrac{1}{k}\right)^{n_0} \geq 100$. On va faire l'application numérique avec les deux valeurs de k possibles. Si $k = \dfrac{1}{2}$, on veut donc

$2^{n_0} \geq 0$, ce qui est vrai dès que $n_0 = 7$. Si on a pris $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on veut $(\sqrt{3})^n \geq 100$. Or, $(\sqrt{3})^8 = 3^4 = 81$ et $81\sqrt{3} > 100$, donc $n_0 = 9$ convient.