# Devoir Surveillé n°6

PTSI B Lycée Eiffel

7 mars 2017

**Durée : 3H45**. Calculatrices interdites.

## Exercice 1

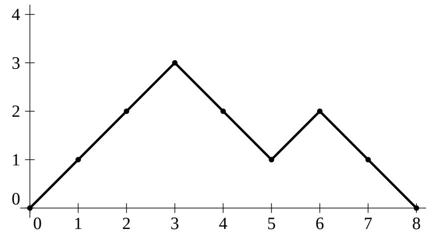
On pose $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$ et $g(x) = x\ln(x) - \dfrac{x^2-1}{2}$.

1. Étudier le plus complètement possible la fonction $g$ (on tracera une allure de courbe).
2. En déduire que, $\forall x \in ]1, +\infty[$, $0 < f(x) < \dfrac{1}{2}$.
3. En calculant et en simplifiant $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, montrer que l'encadrement précédent reste vrai sur $]0, 1[$.
4. La fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Est-elle alors dérivable en 1 ?

## Exercice 2

On appelle mot de Dyck un nombre binaire (uniquement constitué de 0 et de 1) constitué de $2n$ chiffres ($n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) dont $n$ sont des 0 et $n$ sont des 1, et qui vérifie la condition suivante : si on prend un entier $k \leq 2n$ et qu'on ne prend que les $k$ premiers chiffres du nombre, il doit nécessairement contenir plus de 1 que de 0 (au sens large). Ainsi, pour $n = 2$, 1010 est un mot de Dyck (les « sous-mots » 1, 10 et 101 contenant toujours plus de 1 que de 0). Par contre 1001 n'est pas un mot de Dyck car le sous-mot 100 ne vérifie pas notre condition.

1. Déterminer le nombre total de nombres binaires de $2n$ chiffres contenant $n$ zéros et $n$ uns (mais ne vérifiant pas forcément la condition supplémentaire des mots de Dyck).
2. On note $c_n$ le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$. Calculer $c_1$, $c_2$, $c_3$ et $c_4$ (on pourra faire bêtement la liste de tous les mots).
3. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{k-1}c_{n-k}$. En déduire la valeur de $c_5$.
4. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.
5. On considère dans le plan tous les chemins permettant d'aller du point de coordonnées $(0, 0)$ jusqu'au point de coordonnées $(2n, 0)$ en effectuant uniquement des déplacements vers le Nord-Est (une unité vers la droite et une unité vers le haut) ou vers le Sud-Est (une unité vers la droite et une unité vers le bas). On souhaite dénombrer les chemins en question ne passant jamais sous l'axe des abscisses. Donnez leur nombre en utilisant les questions précédentes.
6. Dénombrer de même les chemins ne passant pas sous l'axe des abscisses et ne touchant l'axe des absisses qu'au point de départ et au point d'arrivée du chemin. Ci-dessous, un exemple d'un tel chemin :




## Exercice 3

On note pour tout cet exercice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice $P$ est inversible, et calculer $P^{-1}$.
2. Calculer $P^{-1}AP$ (on notera $D$ la matrice obtenue).
3. Prouver rigoureusement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire les puissances (positives) de la matrice $A$.
5. Exprimer $A^3$ en fonction de $A^2$ et de $A$. En déduire rigoureusement que la matrice $A$ n'est pas inversible.
6. Résoudre l'équation matricielle $N^3 = D$, en admettant que ses solutions $N$ sont nécessairement des matrices diagonales.
7. On chercher maintenant à trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 = A$.
   (a) Montrer que $M^3 = A \Leftrightarrow (P^{-1}MP)^3 = D$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $M^3 = A$.
   (c) Existe-t-il des solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à l'équation $M^2 = A$ ?

## Exercice 4

On considère dans ce problème une suite $(u_n)$ définie par un premier terme $u_0 \in ]0,1[$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$. On posera $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. (a) Montrer que $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
   (b) En déduire le domaine de définition de $f$, puis prouver que la suite $(u_n)$ est bien définie.
   (c) Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par $f$.
   (d) Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. (a) Calculer la dérivée de $f$ et dresser son tableau de variations (on donnera également les limites utiles).
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   (c) Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0,1]$ ainsi (sur le même graphique) que les premiers termes de la suite $(u_n)$ lorsque $u_0 = \dfrac{1}{4}$ (on prendra une échelle adaptée).
   (d) Majorer $|f'(x)|$ sur l'intervalle $[0,1]$.
3. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leq k|1 - u_n|$ (où $k$ est une constante que l'on explicitera à l'aide des questions précédentes).
   (b) En déduire une majoration de $|1 - u_n|$ à l'aide de $n$ et de $|1 - u_0|$.
   (c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(u_n)$.
   (d) Déterminer un entier $n_0$ à partir duquel $u_n$ est une valeur approchée de sa limite à $10^{-2}$ près (on fera l'application numérique concrète).