Devoir Surveillé n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 janvier 2017

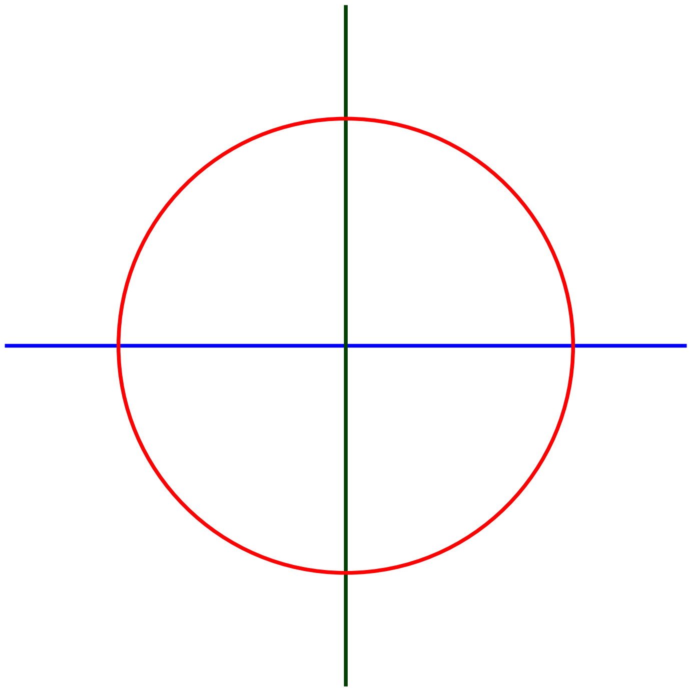
Exercice 1

Remplaçons donc la variable complexe z par un réel x, et séparons ce qui est réel de ce qui est imaginaire : on aura $2x^3 - (1+2i)x^2 + (25i-1)x + 13i = 0$ si $2x^3 - x^2 - x = 0$ (partie réelle nulle) et $-2x^2 + 25x + 13 = 0$ (partie imaginaire nulle). La première équation se factorise sous la forme $x(2x^2 - x - 1) = 0$. La parenthèse a pour racine évidente 1 et pour deuxième racine $-\frac{1}{2}$ (le produit des deux racines est égal au quotient du coefficient constant du trinôme par son coefficient dominant). Les réels 0 et 1 ne sont manifestement pas solutions de l'équation $-2x^2 + 25x + 13 = 0$, tentons notre chance avec la dernière : $-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} + 13 = -\frac{1}{2} - \frac{25}{2} + 13 = 0$, donc $z = -\frac{1}{2}$ est racine de notre équation (incroyable, l'énoncé ne nous avait pas menti !). Comme dans le cas d'un polynôme à coefficients réels, on peut factoriser sous la forme $2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = \left(z + \frac{1}{2}\right)(az^2 + bz + c) = az^3 + \left(b + \frac{1}{2}a\right)z^2 + \left(c + \frac{1}{2}b\right)z + \frac{c}{2}$. Par identification des coefficients, on a $a = 2$, puis $b + \frac{1}{2}a = -1 - 2i$, soit $b = -2 - 2i$; $c + \frac{1}{2}b = 25i - 1$, donc $c = 26i$, ce qui est cohérent avec l'équation du coefficient constant. Reste donc à résoudre l'équation du second degré $2z^2 - (2+2i)z + 26i = 0$, ou encore en divisant tout par deux, $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = (1+i)^2 - 52i = -50i = 50e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Pour une fois, pas besoin de faire de calcul sous forme algébrique pour obtenir une racine carrée δ de Δ, il suffit de poser $\delta = \sqrt{50}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{50}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 5 - 5i$. Les racines de notre équation sont donc les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i+5-5i}{2} = 3 - 2i$, et $z_2 = \frac{1+i-(5-5i)}{2} = -2 + 3i$. Il ne reste plus qu'à conclure : les solutions de l'équation initiale sont données par $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}; -2+3i; 3-2i\right\}$.

Exercice 2

1. Posons donc $z = a + ib$ et calculons $f(z) = \frac{i(a+ib)-1}{a+ib-i} = \frac{(ai-1-b)(a+i(1-b))}{(a+i(b-1))(a-i(b-1))} = \frac{-a+ab-a-ab+i(a^2+(1-b)(-1-b))}{a^2+(b-1)^2} = \frac{-2a+i(a^2+b^2-1)}{a^2+(b-1)^2}$. Cette image est réelle si $a^2 + b^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire si $z \in \mathbb{U}$ (pour une fois, même pas besoin de simplifier l'équation du cercle. Pour les plus rigoureux, il faut supprimer de ce cercle le point d'affixe i pour lequel f n'est pas définie.
2. En reprenant le calcule précédent, $f(z) \in i\mathbb{R}$ si $a = 0$, donc si z est imaginaire pur (et différent de i).
3. Là il vaut mieux ne pas reprendre le calcul précédent. On a $|f(z)| = 1$ si $|iz - 1| = |z - i|$ soit (en repassant à la forme algébrique), si $a^2 + (-1-b)^2 = a^2 + (1-b)^2$, donc si $a^2+b^2+2b+1 = a^2 + 1 + b^2 - 2b$, ce qui équivaut facilement à $b = 0$. Autrement dit, z doit être réel.

4. Vu les ensembles obtenus, ça n'a franchement aucun intérêt, ça sent clairement l'exo où le prof a mis une équation au pif pour la fonction f sans se rendre compte que ça donnait des solutions triviales :



Exercice 3

1. C'est évident : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$.

2. Calculons $u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Cette somme est constituée de n termes, dont le plus petit vaut $\frac{1}{2n}$ (les termes de la somme sont de plus en plus petits), elle est donc minorée par $n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, ce qui prouve que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Or, si la suite (u_n) convergeait vers une limite finie l, on aurai certainement $\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} u_{2n} - u_n = 0$. C'est évidemment incompatible avec le fait que cette suite est minorée par $\frac{1}{2}$. La suite (u_n) étant croissante mais ne convergeant pas, elle ne peut pas être majorée, et diverge nécessairement vers $+\infty$.

3. (a) Un calcul classique, posons $f(x) = x - \ln(1+x)$, la fonction f est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. La fonction f est donc décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, et admet en particulier pour minimum $f(0) = 0$. La fonction f est donc toujours positive, ce qui prouve exactement l'inégalité souhaitée.

   (b) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \frac{1}{n+1}$, on trouve $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$. Pour obtenir l'inégalité de droite avec la même inégalité, il faut se battre un peu plus : constatons que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. On peut appliquer l'inégalité de la question précédente à $x = -\dfrac{1}{n+1}$ pour trouver $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq -\dfrac{1}{n+1}$, il suffit de changer les signes (ce qui retourne évidemment l'inégalité) pour trouver l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

(c) On va utiliser la méthode classique pour la monotonie : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+2) - u_n + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \geq 0$ d'après la question précédente, donc la suite (v_n) est croissante. Au contraire, $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq 0$, donc (w_n) est décroissante. De plus, $w_n - v_n = u_n - \ln(n) - v_n + \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - v_n = 0$. Les deux suites sont alors adjacentes, et convergent donc vers une même limite.

4. (a) C'est du cours : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (et si par malheur on avait oublié, l'énoncé de la question suivante devrait quand même rafraichir la mémoire).

(b) On cherche donc trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{2k+1}$. En multipliant le tout par k et en évaluant pour $k = 0$, on obtient $a = 1$. De même, en multipliant par $k+1$ et en posant $k = -1$, on trouve $b = \dfrac{1}{(-1) \times (-1)} = 1$, et enfin en multipliant par $2k+1$ puis en posant $k = -\dfrac{1}{2}$, on conclut que $c = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = -4$. Autrement dit, $\dfrac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{4}{2k+1}$.

(c) On peut très bien effectuer un calcul direct à base de séparation des termes pairs/impairs dans u_n, mais pour nous amuser un peu, ça fonctionne aussi très bien par récurrence. Initialisons pour $n = 1$ (ça marche aussi trivialement pour $n = 0$) : $u_2 - \dfrac{1}{2}u_1 - 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$, ce qui correspond bien à la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2k+1}$. Supposons la formule vraie au rang n, et tentons de calculer le membre de droite lorsqu'on passe à $n+1$: $u_{2n+2} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} - 1 + \dfrac{1}{2n+3} = u_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{1}{n+1}) - 1 + \dfrac{1}{2n+3} = u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n - 1 + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n+3}$ (par hypothèse de récurrence), ce qui donne bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1}$. On a prouvé la propriété au rang $n+1$ elle est donc vrai pour tout entier $n \geq 1$.

(d) En exploitant les question a et b, on peut écrire $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{24}{2k+1}$. Aux numérateurs près, la première somme est égale à u_n, la deuxième à $u_{n+1} - 1 = u_n + \dfrac{1}{n+1} - 1$ (le décalage d'indice a fait disparaitre le premier terme), et la troisième est celle pour laquelle on vient d'obtenir une sublime formule, donc $z_n = 6u_n + 6\left(u_n + \dfrac{1}{n+1} - 1\right) - 24\left(u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n - 1 + \dfrac{1}{2n+1}\right) = 24u_n - 24u_{2n} +$

$\dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1} + 18$.

(e) Il s'agit de remplacer les u_n par des w_n, ce qui est très simple puisque par définition $u_n = w_n + \ln(n)$. On obtient $z_n = 24w_n + 24\ln(n) - 24w_{2n} - 24\ln(2n) + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1} + 18 = 24w_n - 24w_{2n} - 24\ln(2) + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1} + 18$ en simplifiant les ln.

(f) La suite (w_n) convergeant vers une limite finie (qu'on ne connait pas mais peu importe), on aura $\lim w_n - w_{2n} = 0$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1} = 0$. La formule précédente prouve alors que la suite (z_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 18 - 24\ln(2)$ (superbe !).

Problème

1. Par définition, on aura dans ce cas $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$. On calcule ensuite $u_2 = \dfrac{1^2+0^2}{2} = \dfrac{1}{2}$, puis $u_3 = \dfrac{0^2+\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{1}{8}$ et $u_4 = \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{64}}{2} = \dfrac{17}{128}$.

2. (a) Si (u_n) est une suite constante égale à k, alors on doit avoir $u_{n+2} = u_{n+1} = u_n = k$ (quelle que soit la valeur de n), donc $k = \dfrac{k^2+k^2}{2} = k^2$, soit $k = 0$ ou $k = 1$. Il y a donc deux suites constantes dans l'ensemble $\mathcal{S}$.

   (b) Supposons donc que, pour un certain entier n, on ait $u_n = u_{n+1} = 1$. Une récurrence double triviale permet de prouver que $\forall p \geq n$, $u_p = 1$ (c'est vrai aux rangs n et $n+1$ par hypothèse, et $u_p = u_{p+1} = 1 \Rightarrow u_{p=2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$), mais il faut aussi prouver que les termes précédant u_n sont aussi égaux à 1. On peut pour cela faire une récurrence double descendante en initialisant à u_n et u_{n+1}, et en prouvant que $u_p = u_{p+1} = 1 \Rightarrow u_{p-1} = 1$. En effet, on sait que $u_{p+1} = \dfrac{u_{p-1}^2 + u_p^2}{2}$, donc $u_{p-1}^2 = 2u_{p+1} - u_p^2 = 2 - 1 = 1$ par hypothèse de récurrence. Comme tous les termes de la suite sont positifs (c'est une récurrence double triviale si on tient à être extrêmement rigoureux), on en déduit que $u_{p-1} = 1$, et la récurrence dscendante permet de prouver que tous les termes restants de la suite sont nuls.

   (c) Supposons donc qu'un certain terme u_{n+2} (puisqu'il ne s'agit pas d'un des deux premiers) soit nul. Comme $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{2}$, on aura nécessairement $u_n = u_{n+1} = 0$. On conclut alors comme à la question précédente que la suite est nulle (c'est même un peu plus simple car pour le côté descendant on peut se contenter d'une récurrence simple au lieu de faire une récurrence double).

3. Si la suite (u_n) a pour limite l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 = l^2$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} = l$. Un passage à la limite dans la relation de récurrence donne alors $l = \dfrac{l^2+l^2}{2} = l^2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$.

4. (a) Supposons donc que $a \leq b$, alors a et b étant positifs on aura $a^2 \leq b^2$, et donc $\dfrac{a^2+b^2}{2} \leq \dfrac{b^2+b^2}{2} = b^2$. Comme on a supposé également que $b \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, on en déduit que $b \leq b^2$, ce qui ne peut se produire que si $b \geq 1$, ou si $b = 0$. Dans ce dernier cas, l'encadrement $0 \leq a \leq b$ implique alors que a est également nul.

   (b) Cette fois-ci, on peut écrire que $a^2 + b^2 - 2a \leq 0$, donc $(a-1)^2 + b^2 - 1 \leq 0$. Comme $(a-1)^2$ est évidemment positif, on doit nécessairement avoir $b^2 - 1 \leq 0$, donc $b^2 \leq 1$, ce qui implique $b \leq 1$.

5. En utilisant la relation de récurrence définissant la suite, on calcule $u_{n+3} - u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_{n+1}^2) = \frac{u_{n+2}^2 - u_n^2}{2}$. Or $u_{n+2}^2 - u_n^2$ est du même signe que $u_{n+2} - u_n$ (tout étant positif). Les deux différences sont donc toujours de même signe.
6. (a) Cela découle de façon évidente de la question précédente : puisque $u_{n+2} - u_n \geq 0$, alors $u_{n+3} - u_{n+2} \geq 0$, ce qui suffit à prouver ce qui est demandé.
   (b) La croissance à partir du rang n (précision oubliée dans l'énoncé) se prouve par récurrence double. On sait qu'au rang $n+1$, on a $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ et au rang $n+2$, $u_{n+2} \leq u_{n+3}$. Supposons désormais que pour un certain rang $p \geq n+1$, on a $u_p \leq u_{p+1} \leq u_{p+2}$ (hypothèse de récurrence double), alors la question *a* permet d'affirmer que $u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq u_{p+3}$, ce qui achève la récurrence. La suite n'est également strictement croissante qu'à partir d'un certain rang, ici le rang $n+3$. Supposons en effet que pour un certain entier $p \geq n+3$, on ait $u_p = u_{p+1}$. La question 5 permet alors d'affirmer que $u_p = u_{p-2}$. Mais comme $p - 2 \geq n+1$, et que la suite est croissante à partir du rang $n+1$, on a nécessairement $u_{p-2} = u_{p-1} = u_p = u_{p+1}$. La suite comporte donc (au moins) trois termes consécutifs égaux, et on montre facilement à partir de cela que la suite est constante (c'est exactement le même calcul qu'à la question 2.*b*), cas qui aurait du être exclu par l'énoncé.
   (c) On utilise le calcul de la question 4.*a* en posant $a = u_{n+1}$ et $b = u_{n+2}$. On a alors $u_{n+3} = \frac{a^2 + b^2}{2}$, et par hypothèse $a \leq b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Si on élimine le cas de la suite nulle, cette question assure que $b \geq 1$, soit $u_{n+2} \geq 1$.
   (d) La suite étant strictement croissante à partir du rang $n+3$ (et même $n+1$) et vérifiant $u_{n+3} \geq u_{n+2} \geq 1$, elle ne peut converger que vers une limite strictement supérieure à 1 si elle converge. Or, on a vu que les seules limites finies possibles pour (u_n) étaient 0 et 1. Elle ne converge donc pas, et étant croissante, elle diverge nécessairement vers $+\infty$.
7. Ce sont exactement les mêmes étapes : on prouve d'abord que $u_{n+3} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ en utilisant la question 5. Ensuite, on prouve par récurrence double que la suite est décroissante à partir du rang $n+1$ (exactement la même récurrence que ci-dessus en changeant le sens des inégalités), puis que la suite est strictement décroissante à partir du rang $n+3$ (encore une fois, c'est pareil). Enfin, on applique la question 4.*b* avec $a = u_{n+2}$, $b = u_{n+1}$ et $\frac{a^2 + b^2}{2} = u_{n+3}$, et on en déduit que $u_{n+1} \leq 1$, et donc $u_{n+3} \leq 1$. La suite étant ensuite strictement décroissante et minorée par 0, elle converge nécessairement, et sa limite est nulle puisqu'elle ne peut pas être égale à 1.
8. On calcule les premiers termes de chaque suite jusqu'à obtenir un terme plus grand (ou plus petit) que chacun des deux qui le précèdent, pour pouvoir appliquer la question 6 (ou la 7) :
   - si $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_1 = 0$, alors $u_2 = \frac{2}{2} = 1$, puis $u_3 = \frac{1}{2}$, $u_4 = \frac{\frac{1}{4} + 1}{2} = \frac{5}{8}$ et $u_5 = \frac{\frac{25}{64} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{41}{128}$. Comme $u_5 \leq u_4$ et $u_5 \leq u_3$, la suite converge vers 0 (question 7).
   - si $u_0 = 2$ et $u_1 = 0$, alors $u_2 = 2$, puis $u_3 = 2$, ce qui suffit à assurer que (u_n) diverge vers $+\infty$ puisque u_3 est à la fois supérieur ou égal à u_2 et à u_1 (question 6).
9. (a) Supposons donc, par l'absurde, que $u_1 = u_0$. On peut alors distinguer trois cas suivant la valeur de u_2 :
      - si $u_2 = u_1$, alors la suite (u_n) sera constante, ce qui est exclu par l'énoncé.
      - si $u_1 < u_2$, alors la question 6 assure que la suite va diverger vers $+\infty$, ce qui est également exclu.
      - si $u_1 > u_2$, alors la question 7 assure que la suite va converger vers 0, ce qui est aussi exclu.

      On ne peut donc pas avoir $u_1 = u_0$ avec les hypothèses faites sur la suite.
   (b) C'est à peu près la même chose que pour la question précédente, on va exclure les autres possibilités :

i. si $u_{n+2} = u_{n+1}$, selon que u_{n+3} est égal à u_{n+2}, strictement supérieur à u_{n+2} ou strictement inférieur à u_{n+2}, la suite va respectivement être constante, diverger vers $+\infty$ ou converger vers 0, ce qui n'est pas possible, donc $u_{n+2} \neq u_{n+1}$.

ii. si $u_{n+2} < u_{n+1}$, alors on ne peut pas avoir $u_{n+2} \leq u_n$, sinon la suite convergerait vers 0, donc $u_n < u_{n+2} < u_{n+1}$.

iii. si $u_{n+1} < u_{n+2}$, alors on ne peut pas avoir $u_n \leq u_{n+2}$ sinon la suite divergerait vers $+\infty$, donc $u_{n+1} < u_{n+2} < u_n$.

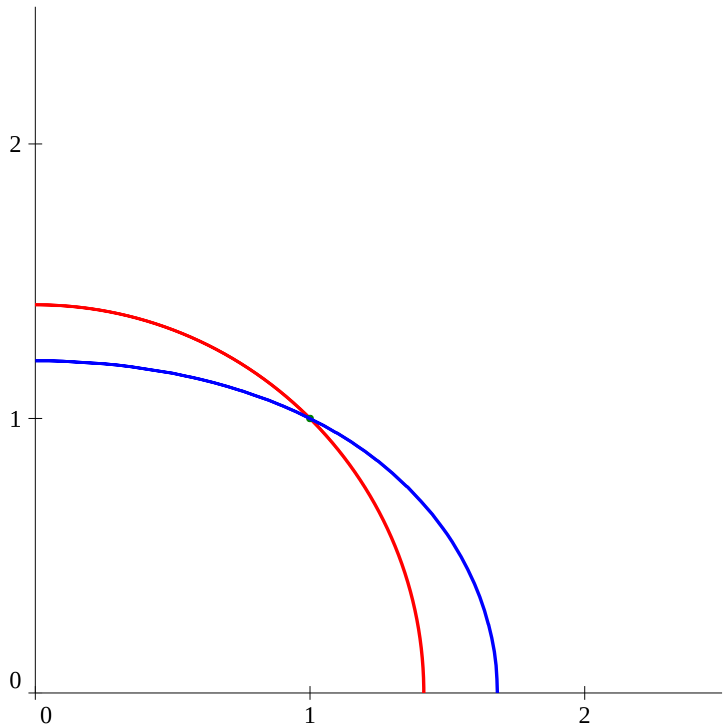
(c) On peut effectuer une récurrence en appliquant la question précédente pour prouver que, pour tout entier n, on va avoir $u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+1}$ et $u_{2n+2} < u_{2n+3} < u_{2n+1}$. Au rang 0, l'encadrement $u_0 < u_2 < u_1$ découle de la question précédente, puis l'inégalité $u_2 < u_1$ implique (toujours en utilisant la question précédente) que $u_2 < u_3 < u_1$. Supposons maintenant les inégalités vraies au rang n, on part alors de $u_{2n+2} < u_{2n+3}$ pour en déduire que $u_{2n+2} < u_{2n+4} < u_{2n+3}$ puis (en gardant l'inégalité de droite de l'encadrement précédent) que $u_{2n+4} < u_{2n+5} < u_{2n+3}$, ce qui prouve les deux encadrement souhaités au rang $n+1$. On a en particulier prouvé qu'on avait toujours $u_{2n} < u_{2n+2}$ et $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, donc la suite (u_{2n}) est strictement croissante, et la suite (u_{2n+1}) strictement décroissante. Comme on a toujours $u_{2n} < u_{2n+1} < u_1$, la suite (u_{2n}) converge vers une limite finie l. De même, $u_{2n+1} > u_{2n} > u_0$ donc la suite (u_{2n+1}) est minorée et converge vers une limite finie l'. En passant à la limite dans la relation $u_{2n+2} = \dfrac{u_{2n}^2 + u_{2n+1}^2}{2}$, on trouve la relation $l = \dfrac{l^2 + l'^2}{2}$. De même, en passant à la limite la relation $u_{2n+3} = \dfrac{u_{2n+1}^2 + u_{2n+2}^2}{2}$, on aura $l' = \dfrac{l'^2 + l^2}{2}$, donc $l' = l$. Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ayant la même limite, on peut en déduire que la suite (u_n) converge vers cette même limite. Cette limite ne peut pas être nulle puisque la suite est minorée par $u_0 > 0$, elle est donc nécessairement égale à 1.

(d) On a en effet prouvé que, quelles que soient les valeurs initiales, la suite (u_n) allait converger vers 0, converger vers 1, ou diverger vers $+\infty$, ce qui est exactement ce qui est demandé dans cette question.

10. Par définition, $u_2(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, donc l'ensemble C_2 est constitué des couples (x, y) de réels positifs vérifiant $x^2 + y^2 = 2$. On reconnait ici l'équation du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, mais la condition $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ restreint l'ensemble C_2 à un quart de cercle (le graphique est fait un peu plus loin).

11. Cette fois-ci, il faut calculer $u_3(x, y) = \dfrac{(\frac{x^2+y^2}{2})^2 + y^2}{2}$. On aura donc $u_3(x, y) = 1$ si $(x^2 + y^2)^2 + 4y^2 = 8$, soit $x^2 = \sqrt{8 - 4y^2} - y^2$ (avec la condition $y \leq \sqrt{2}$ pour que la racine carrée ait un sens), ou encore $x = \sqrt{\sqrt{8 - 4y^2} - y^2}$. On pose donc $h(y) = \sqrt{\sqrt{8 - 4y^2} - y^2}$, la fonction h est définie si $\sqrt{8 - 4y^2} \geq y^2$, soit $8 - 4y^2 \geq y^4$ (tout est positif), ou encore $y^4 + 4y^2 - 8 \leq 0$. En posant $Y = y^2$, le trinôme $Y^2 + 4Y - 8$ admet pour discriminant $\Delta = 16 + 32 = 48 = (4\sqrt{3})$, et pour racines $Y_1 = \dfrac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} < 0$ et $Y_2 = \dfrac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - 2$. La fonction h est alors définie sur l'intervalle $[0, \sqrt{2\sqrt{3} - 2}]$ (puisque y^2 doit être compris entre Y_1 et Y_2). Elle est dérivable sur cet intervalle sauf en $\sqrt{2\sqrt{3} - 2}$ (où sa courbe admettra une tangente verticale), et strictement décroissante sur son domaine de définition (c'est évident même sans expliciter la dérivée, puisque $y \mapsto \sqrt{8 - 4y^2}$ et $y \mapsto -y^2$ sont toutes les deux décroissantes sur ce segment, et qu'on compose par la racine carrée qui est croissante). On peut calculer $h(0) = \sqrt{2\sqrt{2}}$, et bien sûr $h(\sqrt{2\sqrt{3} - 2}) = 0$. Les plus courageux constateront qu'il y a une tangente horizontale en 0. L'ensemble C_3 est obtenu en prenant la courbe représentative de la fonction h et en la symétrisant par rapport à la droite d'équation $y = x$, puisque h exprime x en fonction de y.

12. Si un point (x, y) appartient à la fois à C_2 et à C_3, la suite (u_n) correspondant aura deux termes consécutifs égaux à 1, elle est donc nécessairement constante égale à 1. Autrement dit, le point de coordonnées $(1, 1)$ est le seul à appartenir aux deux ensembles. La courbe C_3 est donc en-dessous du quart de cercle C_2 sur l'intervalle $[0, 1]$ (puisqu'elle coupe l'axe des ordonnées en $\sqrt{2\sqrt{3}-2} < \sqrt{2}$) et au-dessus ensuite. Une allure des deux ensembles :



13. Tout point (x, y) qui se trouve à la fois à l'intérieur (strictement) de C_2 et à l'intérieur de C_3 vérifie $u_2 < 1$ et $u_3 < 1$ (les inégalités auraient du être strictes dans l'énoncé), donc appartient à l'ensemble E_0 puisque la suite va alors converger vers 0. De même, tout point strictement à l'extérieur de C_2 et de C_3 appartiendra nécessairement à E_∞. Ce magnifique problème était un extrait (seulement !) d'un vieux problème de concours PT (Centrale 1989), où on se proposait ensuite de faire beaucoup mieux, en prouvant que toute demi-droite issue de l'origine dans $(\mathbb{R}^+)^2$ contenait exactement un point (x, y) appartenant à E_1, tous les points de la demi-droite étant situés du côté de ce point contenant l'origine appartenant à E_0 et tous les autres à E_∞. Autrement dit, il existe une courbe traversant le quart de plan depuis l'axe des ordonnées jusqu'à l'axe des abscisses et correspondant à l'ensemble E_1. Les points situés en-dessous de cette courbe sont dans E_0, ceux situés à l'extérieur sont dans E_∞. Cette courbe se situe quelque part entre les courbes C_2 et C_3.