Devoir Surveillé n°4

PTSI B Lycée Eiffel

8 janvier 2017

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Déterminer un nombre réel x solution de l'équation $2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$ (on pourra par exemple séparer les parties réelle et imaginaire de cette équation). En déduire une factorisation du membre de gauche de l'équation, puis terminer sa résolution.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{C}$ une application f par la formule $f(z) = \dfrac{iz-1}{z-i}$.

1. Déterminer tous les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$.
3. Déterminer tous les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. Représenter graphiquement les trois ensembles déterminés aux questions précédentes.

Exercice 3

On pose pour tout cet exercice $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$, et en déduire que la suite ne peut pas avoir une limite finie. Que peut-on en déduire sur la nature de la suite (u_n) ?
3. On pose maintenant $v_n = u_n - \ln(n+1)$ et $w_n = u_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que, $\forall x \geq -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire que, si $n \geq 1$, $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
   (c) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones, puis prouver qu'elles convergent vers une même limite.
4. On pose maintenant $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i^2}$.
   (a) Rappeler la formule donnant la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2$.
   (b) Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{k(k+1)(2k+1)}$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}$.

(d) Exprimer z_n en fonction de u_{2n}, u_n et n.

(e) Exprimer z_n en fonction de w_{2n}, w_n et n.

(f) Montrer que (z_n) converge, et donner la valeur de sa limite.

Problème

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble $\mathcal{S}$ constitué de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$, avec $u_0 \geq 0$ et $u_1 \geq 0$. Si (x, y) est un couple de réels positifs, on notera $(u_n(x, y))$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et vérifiant $u_0(x, y) = x$ et $u_1(x, y) = y$. Pour tout réel λ, on notera $E_\lambda = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ converge vers } \lambda\}$. On notera également $E_\infty = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid (u_n(x, y)) \text{ diverge vers } +\infty\}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n(1, 0))$.
2. (a) Déterminer toutes les suites constantes appartenant à $\mathcal{S}$.
   (b) Montrer que, si une suite dans $\mathcal{S}$ a deux termes consécutifs égaux à 1, alors elle est constante.
   (c) Que peut-on dire d'une suite de $\mathcal{S}$ ayant un terme nul autre que les deux premiers ?
3. On suppose qu'une suite de $\mathcal{S}$ admet une limite finie l. En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer les valeurs possibles de l.
4. Soient (a, b) deux réels quelconques.
   (a) Montrer que, si $0 \leq a \leq b \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$, alors $b \geq 1$ ou $a = b = 0$.
   (b) Montrer que, si $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \leq a \leq b$, alors $b \leq 1$.
5. Comparer le signe de $u_{n+3} - u_{n+2}$ et de $u_{n+2} - u_n$ pour une suite (u_n) appartenant à $\mathcal{S}$.
6. On suppose dans cette question que la suite (u_n) (appartenant à $\mathcal{S}$) vérifie la condition suivante : pour un certain entier n, on a $u_n \leq u_{n+2}$ et $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq u_{n+3}$.
   (b) Montrer que la suite est croissante, puis qu'elle est strictement croissante.
   (c) Montrer que $u_{n+2} \geq 1$.
   (d) En déduire que la suite diverge vers $+\infty$.
7. On suppose cette fois-ci que $u_{n+2} \leq u_n$ et $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Montrer en procédent comme dans la question précédente que la suite (u_n) converge vers 0.
8. Quelles sont les limites des suites $(u_n(\sqrt{2}, 0))$ et $(u_n(2, 0))$?
9. On suppose qu'une suite (u_n) appartenant à $\mathcal{S}$ n'a pas pour limite 0, ni $+\infty$, et et qu'elle n'est pas constante.
   (a) Montrer que $u_1 \neq u_0$.
   (b) Montrer que u_{n+2} est toujours strictement compris entre u_n et u_{n+1}.
   (c) On suppose $u_0 < u_1$, montrer que la sous-suite (u_{2n}) est strictement croissante, et la sous-suite (u_{2n+1}) strictement décroissante. Prouver ensuite que (u_n) converge vers 1.
   (d) On prouve de même que la suite (u_n) converge vers 1 si $u_1 < u_0$. Déduire des questions précédentes que tout couple de réels positifs (x, y) appartient à l'un des trois ensembles E_0, E_1 et E_∞.
10. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble $C_2 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid u_2(x, y) = 1\}$.
11. Déterminer une fonction h telle que $u_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = h(y)$. Étudier rapidement la fonction h et représenter graphiquement l'ensemble $C_3 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid u_3(x, y) = 1\}$.
12. Étudier la position relative des ensembles C_2 et C_3.
13. On admet les résultats suivants concernant les suites de $\mathcal{S}$:
    - (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement s'il existe un entier n pour lequel $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$.
    - (u_n) converge vers 0 si et seulement s'il existe un entier n pour lequel $u_n \leq 1$ et $u_{n+1} \leq 1$.

    Déterminer deux sous-ensembles de $(\mathbb{R}^+)^2$ les plus grands possibles inclus respectivement dans E_0 et dans E_∞.