

Devoir Surveillé n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2016

Exercice 1

- Un calcul basique : $z = \frac{6 - 9i + 2i + 3}{5 + 2i} = \frac{(9 - 7i)(5 - 2i)}{25 + 4} = \frac{45 - 35i - 18i - 14}{29} = \frac{35}{29} - \frac{53}{29}i$.
- La normalisation $y' + 3\frac{y}{x} = \frac{1}{x^3}$ impose de résoudre séparément sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Effectuons donc la résolution sur \mathbb{R}^{+*} , les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-3\ln(x)} = \frac{K}{x^3}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On applique la méthode de variation de la constante pour rechercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{K(x)}{x^3}$. On calcule alors $y_p'(x) = \frac{K'(x)}{x^3} - \frac{3K(x)}{x^4}$, et $y_p'(x) + 3\frac{y_p(x)}{x} = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \frac{K'(x)}{x^3} - \frac{3K(x)}{x^4} + \frac{3K(x)}{x^4} = \frac{1}{x^3}$. On trouve la condition $\frac{K'(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3}$, soit $K'(x) = 1$, qui est par exemple vérifiée en posant $K(x) = x$. Cela correspond à $y_p(x) = \frac{1}{x^2}$, et les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{K}{x^3}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Pour les curieux, les solutions sur \mathbb{R}^{-*} sont exactement de la même forme : $y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{L}{x^3}$, avec $L \in \mathbb{R}$. Et on ne peut effectuer aucun recollement en 0 puisqu'aucune de ces solutions n'admet une limite finie en 0^+ ou en 0^- .
- On procède aux étapes habituelles pour ce genre de calcul :
 - Factorisation du dénominateur : $x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$. On ne peut pas factoriser plus puisque la parenthèse a un discriminant égal à $16 - 20 = -4$.
 - Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 - 4x + 5}$. On multiplie tout par x : $\frac{1}{x^2 - 4x + 5} = a + \frac{bx^2 + cx}{x^2 - 4x + 5}$ et on remplace x par 0 pour obtenir $\frac{1}{5} = a$. Puisqu'on a multiplié par x , on peut aussi déterminer la limite en $+\infty$ pour obtenir $0 = a + b$, donc $b = -\frac{1}{5}$ (on utilise simplement le quotient des termes de plus haut degré pour la limite de droite). Enfin, on peut poser $x = 1$ dans l'égalité initiale pour obtenir $\frac{1}{2} = a + \frac{b+c}{2}$, d'où $c = 1 - 2a - b = 1 - a = \frac{4}{5}$. Finalement, $\frac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \frac{1}{5x} - \frac{x-4}{5(x^2 - 4x + 5)}$.
 - Calcul de l'intégrale : le premier morceau ne pose pas de problème : $\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{5x} dx = \left[\frac{\ln(x)}{5} \right]_3^{2+\sqrt{3}} = \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{5} - \frac{\ln(3)}{5}$. Pour le deuxième morceau, calculons $\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{x-4}{x^2 - 4x + 5} dx = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5} - \frac{2}{(x-2)^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) - 2 \arctan(x-2) \right]_3^{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln(4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + 5) - \frac{1}{2} \ln(2) - 2 \arctan(\sqrt{3}) + 2 \arctan(1) = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} =$

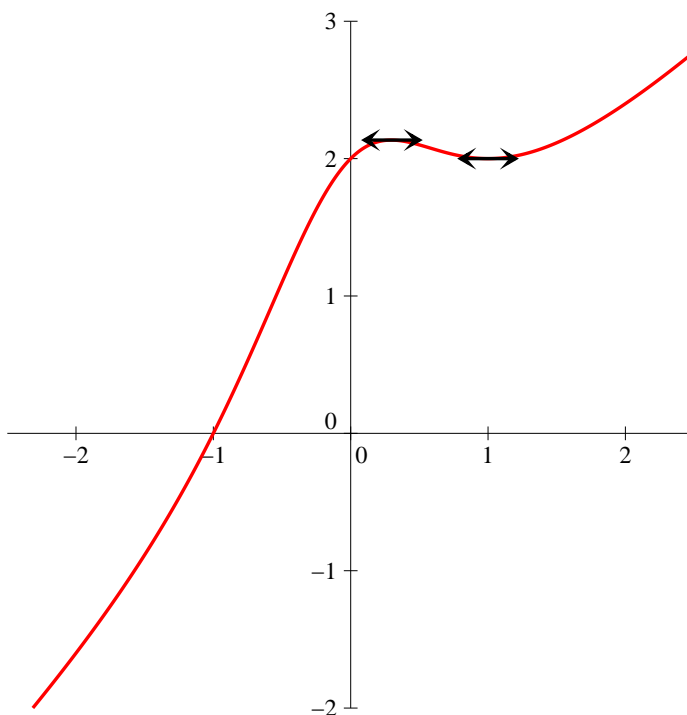
$\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{6}$. Il ne reste plus qu'à conclure : l'intégrale initiale vaut $\frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{5} - \frac{\ln(3)}{5} - \frac{\ln(2)}{10} + \frac{\pi}{30}$ (ça ne se simplifie pas vraiment, autant le laisser sous cette forme).

Exercice 2

- La normalisation ne pose aucun problème puisque $x^2 + 1$ ne s'annule jamais. L'équation homogène $y' + \frac{2x}{x^2 + 1}y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x^2+1)} = \frac{K}{x^2 + 1}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On peut bien sûr appliquer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation complète, mais rien n'empêche de constater que $y = p : x \mapsto x$ convient trivialement. Bon, faisons quand même le calcul en posant $y_p(x) = \frac{K(x)}{x^2 + 1}$. On calcule $y_p'(x) = \frac{(x^2 + 1)K'(x) - 2xK(x)}{(x^2 + 1)^2}$. On aura alors $y_p'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1}y_p(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{K'(x)}{x^2 + 1} - \frac{2xK(x)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2xK(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$, soit $K'(x) = 3x^2 + 1$. On peut choisir $K(x) = x^3 + x$, ce qui donne $y_p(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = x$ (mais si, ça se simplifie!). Conclusion : les solutions de notre équation différentielle sont de la forme $y(x) = \frac{K}{x^2 + 1} + x$, avec $K \in \mathbb{R}$.
- Pour avoir $y(0) = 1$, il faut poser $K = 1$ dans la formule précédente, soit $f_0(x) = x + \frac{1}{x^2 + 1}$. De façon plus générale, $f_k(x) = x + \frac{k + 1}{x^2 + 1}$.
- Calculons donc les équations de ces tangentes : $f_k'(x) = 1 - \frac{2(k + 1)x}{(x^2 + 1)^2}$, donc $f_k'(0) = 1$. C'est en fait suffisant pour affirmer que toutes les tangentes en 0 seront parallèles puisqu'elles auront toutes pour pente 1 (et accessoirement pour ordonnée à l'origine k , par définition des fonctions f_k).
- Non seulement les asymptotes sont parallèles, mais elles sont en fait identiques! En effet, $f_k(x) - x = \frac{k + 1}{x^2 + 1}$ a manifestement une limite nulle en $\pm\infty$, quelle que soit la valeur de k , ce qui prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à toutes les courbes \mathcal{C}_k et $+\infty$ et en $-\infty$.
- Si k et k' sont deux réels distincts, on a $f_k(x) - f_{k'}(x) = \frac{k - k'}{x^2 + 1}$. Cette différence est toujours du signe de $k - k'$, ce qui prouve que la courbe \mathcal{C}_k est toujours au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{k'}$ lorsque $k > k'$.
- Comme on l'a vu précédemment, $f_1(x) = x + \frac{2}{x^2 + 1}$, et $f_1'(x) = 1 - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}$. Cette dérivée est bien entendu du signe de son numérateur $x^4 + 2x^2 - 4x + 1$, qui a pour racine évidente $x = 1$ (coup de pot, quand même). On peut donc poser $x^4 + 2x^2 - 4x + 1 = (x - 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b)x^2 + (d - c)x - d$. Une petite identification des coefficients permet d'obtenir les conditions $a = 1$; $b - a = 0$ donc $b = 1$; $c - b = 2$ donc $c = 3$; $d - c = -4$, donc $d = -1$ (cohérent avec la dernière équation). On trouve donc $x^4 + 2x^2 - 4x + 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + 3x - 1)$. Posons $g(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$, la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $g'(x) = 3x^2 + 2x + 3$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 24 < 0$. Puisque g' est strictement positive, la fonction g est strictement croissante et bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (le calcul des limites ne pose aucun problème). Il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. On peut préciser un peu plus : $g(0) = -1$ et $g(1) = 4$ donc le théorème des valeurs intermédiaires assure que $\alpha \in]0, 1[$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant pour la fonction f :

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
$g(x)$		-	\emptyset	+	+
$f'(x)$		+	\emptyset	-	\emptyset
f	$-\infty$	\nearrow	\nearrow	\searrow	\nearrow

On ne peut pas vraiment calculer précisément $f(\alpha)$, même si on peut facilement l'encadrer : sur l'intervalle $[0, 1]$, on a $1 \leq x^2 + 1 \leq 2$, donc $1 \leq \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$. On en déduit facilement que $1 \leq f(x) \leq 3$, et le tableau de variations assure qu'en fait $2 < f(\alpha) \leq 3$. La courbe \mathcal{C}_1 ressemble à ceci :



Exercice 3

- Sur $]0, +\infty[$, on pose donc $y(x) = z(\ln(x))$, et on calcule $y'(x) = \frac{z'(\ln(x))}{x}$ puis $y''(x) = -\frac{z'(\ln(x))}{x^2} + \frac{z''(\ln(x))}{x^2}$. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve l'équation équivalente $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) - 3z(\ln(x)) = x^4$. En changeant la variable pour poser $t = \ln(x)$, cela revient à avoir $z''(t) - 2z'(t) - 3z(t) = e^{4t}$. Cette équation du second ordre à coefficients constants a pour équation caractéristique $t^2 - 2t - 3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$, et dont les racines sont $t_1 = \frac{2 - 4}{2} = -1$ et $t_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme $z_h(t) = Ae^{-t} + Be^{3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme le réel 4 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière à l'équation sous la forme $z_p(t) = Ke^{4t}$. On aura alors $z'_p(t) = 4Ke^{4t}$ puis $z''_p(t) = 16Ke^{4t}$, et la fonction est solution de l'équation complète si et seulement si $(16K - 8K - 3K)e^{4t} = e^{4t}$, soit $K = \frac{1}{5}$. On choisit donc $K = \frac{1}{5}$, et toutes les solutions de l'équation complète sont les fonctions $z : t \mapsto \frac{1}{5}e^{4t} + Ae^{-t} + Be^{3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il n'y a

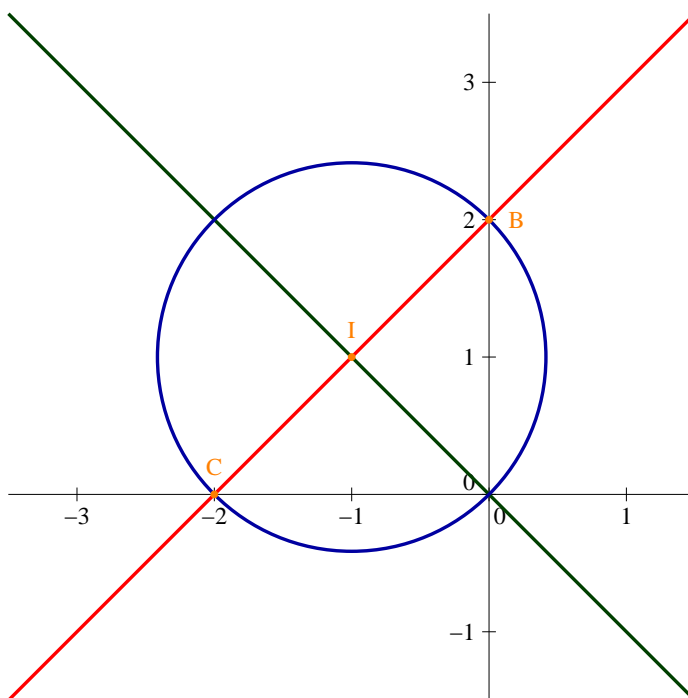
plus qu'à remonter le changement de variable pour retrouver les solutions de notre équation initiale sur $]0, +\infty[$: $y(x) = \frac{1}{5}e^{4\ln(x)} + Ae^{-\ln(x)} + Be^{3\ln(x)} = \frac{x^4}{5} + \frac{A}{x} + Bx^3$, avec toujours $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- Il suffit de poser $t = \ln(-x)$, ou si on préfère $y(x) = z(\ln|x|)$ pour pouvoir faire le calcul sur $] -\infty, 0[$. Les dérivées de y ne sont absolument pas modifiées par rapport au calcul précédent (au détail près de la présence de la valeur absolue dans le \ln), et le second membre non plus puisque $(-e^t)^4 = e^{4t}$. Les solutions seront donc exactement de la même forme (quand on remonte le changement de variable, on aura un changement de signe sur le terme en x^3 et sur le terme en $\frac{1}{x}$, mais quitte à changer le signe des constantes, la forme reste la même), soit $y(x) = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x} + Dx^3$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.
- Les fonctions solutions sur chacun des deux intervalles n'auront une limite finie en 0 (respectivement 0^+ et 0^-) que si les constantes A et C sont nulles. Dans ce cas, la limite en question est nulle de chaque côté. On trouve alors des solutions potentielles de la forme $\frac{x^4}{5} + Bx^3$ sur \mathbb{R}^+ , et $\frac{x^4}{5} + Dx^3$ sur \mathbb{R}^- . Ces fonctions ont des dérivées première et seconde qui sont toujours nulles en 0 (quand on dérive deux fois le x^3 , il reste un facteur x qui s'annule en 0), on peut toujours recoller de telles fonctions en 0, même quand les constantes B et D sont distinctes.

Exercice 4

- Calculons donc $f(1) = \frac{1-2i}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$; puis $f(2+i) = \frac{2-i}{4+i} = \frac{(2-i)(4-i)}{16+1} = \frac{7}{17} - \frac{6}{17}i$; et enfin $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2} = \frac{1 + i(\sqrt{3}-4)}{5 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i(\sqrt{3}-4))(5 - i\sqrt{3})}{25 + 3} = \frac{5 + 3 - 4\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} - 20i}{28} = \frac{2 - \sqrt{3}}{7} - i\frac{\sqrt{3} + 5}{7}$.
- On peut faire les deux à la fois en exhibant simplement la réciproque (s'il y en a une, c'est que l'application est bijective) : $f(z) = \frac{z-2i}{z+2} = Z \Leftrightarrow z-2i = zZ+2Z \Leftrightarrow z(1-Z) = 2Z+2i \Leftrightarrow z = \frac{2Z+2i}{1-Z}$, à condition bien entendu d'avoir $Z \neq 1$ (sinon Z n'a pas d'antécédent par l'application f). On en déduit que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ vers $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et que sa réciproque est définie par $f^{-1}(z) = \frac{2z+2i}{1-z}$.
- Posons donc $z = a + ib$ et calculons $f(z) = \frac{a+i(b-2)}{a+2+ib} = \frac{(a+i(b-2))(a+2-ib)}{(a+2)^2+b^2} = \frac{a^2+2a+b^2-2b+i(ab-2a+2b-4-ab)}{(a+2)^2+b^2}$. Ce nombre est réel si sa partie imaginaire est nulle, donc si $-2a+2b-4=0$, ou encore $b=a+2$. On reconnaît là l'équation d'une droite (de coefficient directeur 1 et d'ordonnée à l'origine 2 pour ceux qui ont vraiment du mal à reconnaître), à laquelle il faut tout de même enlever le point d'affixe -2 . On pouvait d'ailleurs très bien obtenir ce résultat de façon purement géométrique : $f(z) \in \mathbb{R}$ revient à dire que $\arg\left(\frac{z-2i}{z+2}\right) \equiv 0[\pi]$, ou encore que $\arg(z-2i) \equiv \arg(z+2)[\pi]$. En notant A, B et C les images respectives des nombres complexes $z, 2i$ et -2 dans le plan complexe, on peut traduire cela par $(\vec{i}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{CA})[\pi]$, ou encore $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) \equiv 0[\pi]$. Cela revient exactement à dire que les points A, B et C sont alignés. Autrement dit, A est sur la droite (BC) , qui est exactement la droite d'équation $y = x + 2$. Un petit dessin illustratif pour les trois ensembles sera donné après la question 5.

4. En reprenant le calcul de la question précédente, on aura cette fois-ci $f(z)$ imaginaire pur si $a^2 + 2a + b^2 - 2b = 0$, soit $(a + 1)^2 + (b - 1)^2 = 2$. On reconnaît l'équation du cercle de centre $I(-1 + i)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (auquel il faut à nouveau enlever le point C). Là encore on pouvait s'en sortir géométriquement : en reprenant les notations de la question précédente, on aura cette fois $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui revient à dire que le triangle ABC est rectangle en A . Cela se produit, comme chacun le sait depuis ses années de maternelle ou à peu près, lorsque le point A appartient au cercle de diamètre $[BC]$. Or, ce cercle a bien pour centre I (le milieu de $[BC]$) et pour rayon $\sqrt{2}$. Là encore, voir la fugire après la question 5.
5. Ah, pour celle-ci, il vaut nettement mieux ne pas utiliser la forme obtenue en posant $z = a + ib$. Ce n'est d'ailleurs pas du tout nécessaire, on veut $|f(z)| = 1$, soit $\left| \frac{z - 2i}{z + 2} \right| = 1$, soit encore $|z - 2i| = |z + 2|$. On peut à nouveau conclure géométriquement (on reconnaît la médiatrice du segment $[BC]$), ou bien on pose maintenant $z = a + ib$: cela donne $|a + i(b - 2)| = |a + 2 + ib|$, donc en élevant au carré (tout est positif) $a^2 + (b - 2)^2 = (a + 2)^2 + b^2$. On développe et on simplifie : $a^2 + b^2 - 4b + 4 = a^2 + 4a + 4 + b^2 \Leftrightarrow a = -b$. On reconnaît bien la droite de pente -1 passant par l'origine. Sur le schéma qui suit, la droite de la question 3 est en rouge, le cercle de la question 4 est en bleu et la droite de la question 5 est en vert :



6. (a) Posons donc : $f(2e^{i\theta}) = \frac{2(e^{i\theta} - i)}{2(e^{i\theta} + 1)}$, puis appliquons la factorisation par l'angle moitié (si elle ne semble pas évidente au numérateur, on commence par factoriser par $e^{i\frac{\pi}{2}}$ pour se débarrasser du i) : $f(z) = \frac{e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}(e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} - e^{i(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{2i \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{2 \cos(\frac{\theta}{2})} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ (on remplace simplement le i restant au numérateur par $e^{i\frac{\pi}{2}}$).
- (b) Dans la formule obtenue à la question précédent, le quotient $\frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ est un nombre réel, donc $f(z)$ est de la forme $ke^{i\frac{3\pi}{4}}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Selon le signe de k , on aura $\text{Arg}(f(z)) = \frac{3\pi}{4}$ ou $\text{Arg}(f(z)) = -\frac{\pi}{4}$, mais dans tous les cas, $f(z)$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

- (c) Le problème est de savoir si tous les points de la droite qu'on vient d'obtenir sont ou non images d'éléments de \mathcal{C} . Mais comme on sait que f est bijective, il suffit de travailler dans l'autre sens. Soit donc un nombre complexe $z = a - ai$, affixe d'un point de la droite Δ , l'antécédent de z par l'application f est le nombre $f^{-1}(a - ai) = \frac{2a - 2ai + 2i}{1 - a + ai} = 2 \times \frac{a + i(1 - a)}{1 - a + ai}$. Ce nombre est un nombre complexe de module 2 (on constate facilement que le numérateur et le dénominateur de la fraction ont le même module), donc $f^{-1}(z) \in \mathcal{C}$. L'image par f du cercle \mathcal{C} est donc la droite Δ tout entière.

Exercice 5

- Posons donc comme on nous le demande $y(x) = z(\arccos(x))$, et calculons $y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arccos(x))$, puis $y''(x) = \frac{1}{1-x^2}z''(\arccos(x)) - \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}z'(\arccos(x))$ (la dérivée de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est bien $\frac{-2x}{-2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$). On remplace maintenant dans l'équation (E) (en faisant bien attention aux signes, on multiplie y'' par $x^2 - 1$ et non par $1 - x^2$) pour obtenir $-z''(\arccos(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arccos(x)) - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arccos(x)) - 8z(\arccos(x)) = 2x$. Il est temps de ramplacer tous les x par des $\cos(t)$, et donc $\sqrt{1-x^2}$ par $\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)} \sin(t)$ sur l'intervalle de résolution choisi. On trouve alors $-z''(t) - \frac{2\cos(t)}{\sin(t)}z'(t) - 8z(t) = 2\cos(t)$.
- Puisqu'on nous demande juste de vérifier, on peut se contenter de dériver deux fois u et de remplacer dans l'équation (F) pour retrouver l'équation obtenue à la question précédente (ce n'est pas dur). Mais soyons donc courageux et faisons le calcul dans l'autre sens (ce qui prouvera en passant qu'il y a vraiment équivalence entre les deux équations). On pose donc $z(t) = \frac{u(t)}{\sin(t)}$, et on calcule $z'(t) = \frac{u'(t)}{\sin(t)} - \frac{u(t)\cos(t)}{\sin^2(t)}$ (je dérive comme un produit pour alléger les calculs), puis $z''(t) = \frac{u''(t)}{\sin(t)} - \frac{u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} - \frac{u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{u(t)}{\sin(t)} + \frac{2u(t)\sin(t)\cos^2(t)}{\sin^4(t)} = \frac{u''(t)}{\sin(t)} + \frac{u(t)}{\sin(t)} - \frac{2u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{2u(t)\cos^2(t)}{\sin^3(t)}$. Il est temps de remplacer tout cela joyeusement dans l'équation de la question 1 pour obtenir l'équation équivalente suivante : $-\frac{u''(t)}{\sin(t)} - \frac{u(t)}{\sin(t)} + \frac{2u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} - \frac{2u(t)\cos^2(t)}{\sin^3(t)} - \frac{2u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{2u(t)\cos^2(t)}{\sin^3(t)} - \frac{8u(t)}{\sin(t)} = 2\cos(t)$. Une petite multiplication par $-\sin(t)$ et on tombe exactement sur l'équation (F) : $u''(t) + 9u(t) = -2\cos(t)\sin(t)$.
- L'équation (F) est une équation du second ordre à coefficients constants. Inutile d'écrire son équation caractéristique pour résoudre l'équation homogène, on doit savoir par cœur que pour ce genre d'équation (sans terme en u'), on va trouver des solutions de la forme $u_h(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Pour trouver une solution particulière, on peut constater que le second membre peut s'écrire $-\sin(2t) = -\text{Im}(e^{i2t})$. On peut donc chercher une solution complexe à l'équation $u''(t) + 9u(t) = -e^{i2t}$ sous la forme $u_c(t) = Ke^{i2t}$. On calcule aisément $u_c''(t) = -4Ke^{2it}$, et la fonction u_c est donc solution si $5Ke^{2it} = -e^{2it}$, soit $K = -\frac{1}{5}$. On a donc $u_c(t) = -\frac{1}{5}e^{2it}$, et il suffit de prendre sa partie imaginaire pour trouver une solution particulière de l'équation (F) : $u_p(t) = -\frac{1}{5}\sin(2t)$. On conclut : les solutions de l'équation (F) sont les fonctions de la forme $u : t \mapsto A\cos(3t) + B\sin(3t) - \frac{1}{5}\sin(2t)$, avec

$(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4. On ne reviendra pas trop sur les détails permettant de prouver que les équations (E) et (F) sont bien équivalentes sur les intervalles de résolution choisis, et on se contentera de remonter le calcul : $z(t) = \frac{u(t)}{\sin(t)} = \frac{A \cos(3t)}{\sin(t)} + \frac{B \sin(3t)}{\sin(t)} - \frac{1}{5} \sin(2t)$. Rappelons en passant que $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$, et que $\sin(3t) = 3 \sin(t) - 4 \sin^3(t)$, ce qui permet de simplifier un peu : $z(t) = \frac{A \cos(3t)}{\sin(t)} + 3B - 4B \sin^2(t) - \frac{2}{5} \cos(t) = \frac{A \cos(3t)}{\sin(t)} + 4B \cos^2(t) - B - \frac{2}{5} \cos(t)$. Dernière étape, on remplace les t par des arccos(x). Bien sûr on peut écrire $\sin(t) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ sur notre intervalle, et $\cos(3t) = 4 \cos^3(t) - 3 \cos(t) = 4x^3 - 3x$. On trouve alors les superbes expressions suivantes pour les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $] -1, 1[$:
- $$y(x) = \frac{A(4x^3 - 3x)}{\sqrt{1-x^2}} + B(4x^2 - 1) - \frac{2}{5}x, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

5. La première condition $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ se traduit donc, en utilisant la formule précédente, par

$$\frac{A\left(\frac{4}{8} - \frac{3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + B(1-1) - \frac{1}{5} = 1, \text{ soit } -\frac{2}{\sqrt{3}}A = \frac{6}{5}, \text{ et donc } A = -\frac{3\sqrt{3}}{5}.$$

Pour exploiter la deuxième condition, il faut d'abord dériver les formules obtenues pour les solutions : $y'(x) = \frac{A(12x^2 - 3)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{Ax(4x^3 - 3x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + 8Bx - \frac{2}{5}$. On veut donc avoir $\frac{A(3-3)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} +$

$$\frac{\frac{A}{2}\left(\frac{4}{8} - \frac{3}{2}\right)}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} + 4B - \frac{2}{5} = 1, \text{ soit } -\frac{4}{3\sqrt{3}}A + 4B = \frac{7}{5}, \text{ ou encore } 4B = \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}, \text{ et donc } B = \frac{3}{20}$$

(les valeurs sont simples non, aucune raison de se plaindre de calculs complexes !). La solution recherchée au problème de Cauchy posé est donc la suivante :

$$y(x) = \frac{3\sqrt{3}(3x - 4x^3)}{5\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(4x^2 - 1)}{20} - \frac{2}{5}x.$$