Devoir Surveillé n°3

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2016

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Les questions de ce premier exercice sont complètement indépendantes.

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = \dfrac{(3+i)(2-3i)}{5+2i}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $x^3y' + 3x^2y = 1$.
3. Calculer $\displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x}\,dx$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle du premier ordre $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$.

1. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'unique solution f_0 de l'équation vérifiant $f_0(0) = 1$. On notera plus généralement f_k l'unique solution vérifiant $f_k(0) = 1 + k$, et $\mathcal{C}_k$ la courbe intégrale correspondante.
3. Vérifier que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 0 sont toutes parallèles.
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, et que toutes ces asymptotes sont parallèles entre elles.
5. Étudier les positions relatives des différentes courbes $\mathcal{C}_k$.
6. Étudier les variations de la solution f_1, puis tracer une allure soignée de sa courbe $\mathcal{C}_1$ (on démontrera précisément que sa dérivée f_1' s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$, même si on ne sera pas capable de déterminer précisément la valeur d'une de ces deux racines).

Exercice 3

On considère dans cet exercice l'équation différentielle $x^2y'' - xy' - 3y = x^4$.

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.
2. Résoudre de même l'équation sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ (avec un changement de variable à peine différent du précédent).
3. Étudier l'existence de solutions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour que le recollement puisse fonctionner ici, il faudra donc que les limites de y, de y' et de y'' soient identiques en 0^+ et en 0^-.

Exercice 4

On considère dans cet exercice l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-2\}$ par $f(z) = \dfrac{z-2i}{z+2}$.

1. Déterminer sous forme algébrique les valeurs de $f(1)$, $f(2+i)$ et $f(e^{i\frac{\pi}{3}})$.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}$ vers un ensemble à déterminer, et donner une expression simple de sa réciproque f^{-1}.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on en donnera une description géométrique simple).
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on en donnera une description géométrique simple).
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on en donnera une description géométrique simple).
6. On note enfin $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \text{ et } z \neq -2\}$, et on souhaite déterminer $f(\mathcal{C})$.
   (a) En posant $z = 2e^{i\theta}$, prouver que $f(z) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \dfrac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$.
   (b) En déduire que $g(\mathcal{C})$ est inclus dans une droite Δ dont on précisera l'équation.
   (c) Conclure rigoureusement.

Exercice 5

On souhaite résoudre sur l'intervalle $]-1,1[$ l'équation différentielle
$(E) : (x^2-1)y'' + 3xy' - 8y = 2x$.

1. Pour toute solution y de l'équation (E), on pose $y(x) = z(\arccos(x))$. Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction $t \mapsto z(t)$ (où on a bien sûr posé $t = \arccos(x)$).
2. On pose désomais $u(t) = \sin(t)z(t)$. Vérifier que la fonction u est elle-même solution de l'équation $(F) : u''(t) + 9u(t) = -2\cos(t)\sin(t)$ sur l'intervalle $]0,\pi[$.
3. Résoudre l'équation (F).
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $]-1,1[$ (on simplifiera les expressions obtenues).
5. Déterminer l'unique solution f de (E) vérifiant $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.