Devoir Surveillé n°2

PTSI B Lycée Eiffel

18 octobre 2016

Durée : 3H45. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Les questions de ce premier exercice sont indépendantes.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, l'entier $n(n^2+5)$ est divisible par 6.
2. Résoudre l'équation $2\cos^3(x) + \cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$.
3. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$.
4. Résoudre l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^i$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k$ (on pourra réécrire la somme initiale d'une autre manière). Redémontrer cette dernière formule par récurrence.

Exercice 2

On pose dans cet exercice $f(x) = \dfrac{2\sin(x)+1}{2\cos(x)+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f, en déduire un intervalle d'étude intelligent pour la fonction f.
3. Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{13\pi}{4}\right)$.
4. Déterminer les antécédents du réel 1 par la fonction f.
5. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet sur l'intervalle d'étude choisi.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0, ainsi que celle de sa tangente en son point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
7. Tracer une allure soignée de la courbe, ainsi que des deux tangentes calculées à la question précédente.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{4x^2-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la fonction f, et en dresser un tableau de variations complet.
3. En déduire si f est injective, et si elle est surjective. Déterminer deux ensembles A et B les plus grands possibles tels que f effectue une bijection de A vers B.
4. Déterminer en fonction de y le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Retrouver à l'aide de ce calcul les résultats de la question précédente.
5. Déterminer une expression de la réciproque de l'application $f_{|A}$.

Exercice 4

On définit une fonction f par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2-2x}{2x-x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer les antécédents par f du réel $\dfrac{\pi}{6}$.
3. Vérifier que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(2-x) = -f(x)$. Cette égalité traduit le fait que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est symétrique par rapport à un point. Lequel ?
4. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et en déduire la tableau de variations complet de la fonction f.
6. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}_f$.
7. En simplifiant l'expression de f' (si vous ne l'avez pas déjà fait), exprimer $f(x)$ de façon plus simple (il doit rester de l'arctan mais sans quotient à l'intérieur) sur chacun de ses intervalles de définition (attention, l'expression doit être différente selon les intervalles).
8. À l'aide des résultats des questions 2 et 7, déterminer la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
9. En posant $x = 1 - \tan(\theta)$, retrouver l'expression simplifiée de f sur l'intervalle $]0,2[$.