

Devoir Surveillé n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 septembre 2016

Exercice 1

1. On passe tout du même côté et on met au même dénominateur (sans le développer!) pour obtenir $\frac{(2x+3)(2x-3) - 4x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \leq 0$, soit $\frac{4x-9}{(x-1)(2x-3)} \leq 0$. Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes :

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	
$4x-9$	-	-	-	+
$(x-1)(2x-3)$	+	0	-	+
$\frac{4x-9}{(x-1)(2x-3)}$	-	+	-	+

On peut conclure : $\mathcal{S} =]-\infty, 1[\cup \left] \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right]$.

2. On commence par tout écrire à base d'exponentielles : $e^x + e^{-x} + 2e^x - 2e^{-x} = 2$, soit $3e^x - 2 - e^{-x} = 0$. En multipliant tout par e^x et en posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $3X^2 - 2X - 1 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$ et admet deux racines $X_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$ et $X_2 = \frac{2+4}{6} = 1$. La première valeur obtenue n'est pas possible vu le changement de variable effectué, la seule solution restante est donc $x = \ln(1) = 0$.
3. Le plus simple est de tout faire passer du même côté et de faire un tableau :

x	0	1
$ 1-x $	$1-x$	0 $x-1$
$ 2x $	$-2x$ 0	$2x$ $2x$
$ 1-x - 2x + 3$	$x+4$	$4-3x$ $2-x$

On peut maintenant résoudre sur chaque intervalle : sur $] -\infty, 0]$, l'inéquation devient $x+4 \leq 0$, soit $x \leq -4$, on conserve donc l'intervalle $] -\infty, -4]$; sur l'intervalle $[0, 1]$, on est ramené à résoudre $4-3x \leq 0$, soit $x \geq \frac{4}{3}$, ce qui ne se produit jamais sur cet intervalle; enfin, sur $[1, +\infty[$, on se ramène à $2-x \leq 0$, soit $x \geq 2$, et on garde l'intervalle $[2, +\infty[$. Finalement, $\mathcal{S} =]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$.

4. Essayons de faire le calcul dans l'autre sens, on souhaite obtenir un membre de gauche à l'équation de la forme $aX^2 + bX + c = a \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b \left(x + \frac{1}{x}\right) + c = ax^2 + 2a + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = \frac{ax^4 + bx^3 + (2a+c)x^2 + bx + a}{x^2}$. Comme 0 n'est pas solution de l'équation initiale (ce qui est indispensable pour avoir le droit de faire ce changement de variable, une multiplication ou une division par x^2 ne changera pas les solutions, et notre second membre est donc équivalent à celui de l'équation de départ dès que $a = 1$, $b = 2$ et $2a + c = -1$ (par identification, les deux dernières conditions étant identiques aux deux premières). On est donc ramené à la résolution de l'équation équivalente $X^2 + 2X - 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$,

et admet donc pour solutions $X_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $X_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$. Il reste à remonter jusqu'aux valeurs de x : si $x + \frac{1}{x} = X_1 = -3$, alors $x^2 + 3x + 1 = 0$, cette équation a pour discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$ et admet comme racines $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. De même on aura $x + \frac{1}{x} = 1$ si $x^2 - x + 1 = 0$, ce qui donne $\Delta = -3$, donc pas d'autre solution réelle. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie quand $x > 0$ (à cause du \ln) et quand $1 + \ln(x) \neq 0$, soit $x \neq e^{-1}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*} \setminus \left\{ \frac{1}{e} \right\}$.

2. Il y a donc quatre limites à calculer :

- $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} 1 + \ln(x) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ (le numérateur a une limite finie positive).
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} 1 + \ln(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$.
- enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée (le x du numérateur l'emporte sur le $\ln(x)$ du dénominateur, on peut factoriser ce dénominateur par $\ln(x)$ pour être extrêmement rigoureux).

3. La fonction f est sans problème dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = \frac{1 + \ln(x) - 1}{(1 + \ln(x))^2} = \frac{\ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}$. Autrement dit, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$, ce qui permet de dresser le tableau suivant, en calculant en passant $f(1) = 1$:

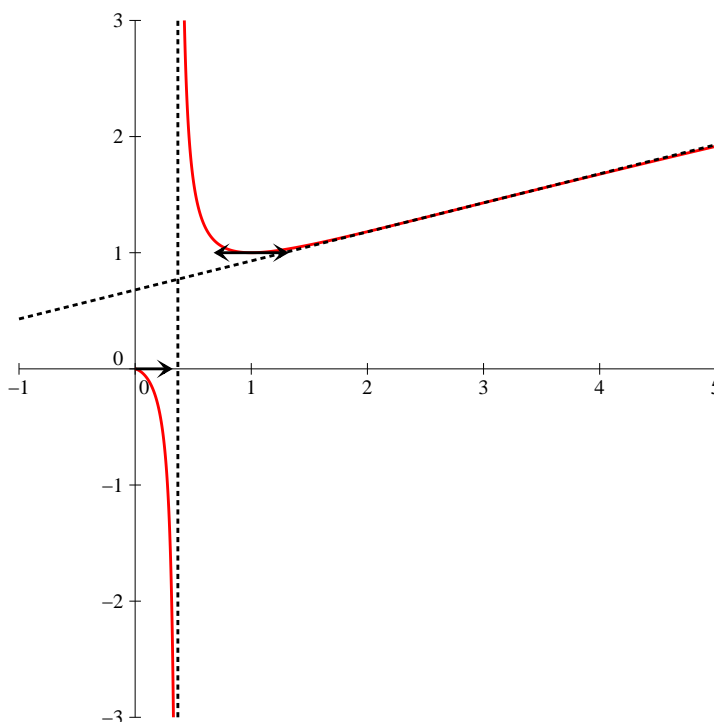
x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	\emptyset	-	+
f	0	$-\infty$	1	$+\infty$

4. Pour simplifier le calcul de la limite, on peut poser $X = \ln(x)$, de façon à avoir $f'(x) = \frac{X}{(1+X)^2}$. Attention tout de même, lorsque x tend vers 0, X va tendre vers $-\infty$. Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{X}{(1+X)^2} = 0$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. Il y a donc en 0 une tangente horizontale à la courbe représentative de f .

5. Calculons donc $f(e) = \frac{e}{1 + \ln(e)} = \frac{e}{2}$, puis $f'(e) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$. L'équation de la tangente T est donc $y = \frac{1}{4}(x - e) + \frac{e}{2} = \frac{x + e}{4}$. Pour l'étude de la position relative, on veut résoudre l'inéquation $\frac{x}{1 + \ln(x)} \geq \frac{x + e}{4}$. L'inéquation ne peut pas être vérifiée sur $\left] 0, \frac{1}{e} \right[$ (ce qui est à gauche est négatif, et à droite c'est positif), dans l'intervalle restant on peut multiplier par le dénominateur pour obtenir $4x \geq (x + e)(1 + \ln(x))$, soit $3x - x \ln(x) - e \ln(x) - e \geq 0$.

Malheureusement, ça ne se résout pas facilement. Posons donc $g(x) = 3x - x \ln(x) - e \ln(x) - e$, on a $g'(x) = 3 - \ln(x) - 1 - \frac{e}{x} = 2 - \ln(x) - \frac{e}{x}$, puis $g''(x) = -\frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} = \frac{e-x}{x^2}$. La fonction g' est donc croissante sur $]0, e]$ et décroissante ensuite, comme $g'(e) = 0$, on en déduit que g' est toujours négative, et que g elle-même est donc décroissante. Comme $g(e) = 0$, on aura $g(x) \geq 0$ sur $]0, e]$, et $g(x) \leq 0$ ensuite. On en déduit que la courbe est au-dessus de sa tangente sur $]\frac{1}{e}, e]$, et en-dessous sur $[e, +\infty[$.

6. Voici la courbe :



Exercice 3

- Il faut évidemment que ce qui se trouve sous la racine carrée soit positif, soit $x^2 + mx - 2 \geq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = m^2 + 8$ (qui est toujours positif, quelle que soit la valeur de m), et a pour racines $x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 8}}{2}$ et $x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 8}}{2}$. L'équation est définie à l'extérieur de ces deux racines (non, je n'ai pas envie d'écrire les deux intervalles).
- Élevons l'équation au carré (ce n'est pas une équivalence mais peu importe) pour obtenir $x^2 - 2x - 2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, soit $3x^2 + 6x + 3 = 0$, ou encore $3(x + 1)^2 = 0$. La seule solution possible est donc $x = -1$, dont on vérifie facilement qu'elle n'est pas solution de l'équation initiale (elle est dans l'ensemble de définition de l'équation, mais le membre de gauche vaut $\sqrt{1} = 1$, et celui de droite vaut -1 lorsque $x = -1$). Du coup, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Calculons donc $\Delta = (4 - m)^2 - 36 = m^2 - 8m + 16 - 36 = m^2 - 8m - 20 = (m + 2)(m - 10)$ (la factorisation est facile à trouver si on a la curiosité d'aller regarder la suite de l'énoncé). Si $-2 < m < 10$, le discriminant est strictement négatif et l'équation n'a donc pas de solution. Lorsque $m = -2$, $\Delta = 0$ et il y a une solution unique : $x = \frac{m - 4}{6} = -1$. Lorsque $m = 10$, on a également $\Delta = 0$, et une seule solution : $x = \frac{m - 4}{6} = 1$. Si $m < -2$ ou $m > 10$, il y aura deux solutions : $x_1 = \frac{m - 4 - \sqrt{(m + 2)(m - 10)}}{6}$, et $x_2 = \frac{m - 4 + \sqrt{(m + 2)(m - 10)}}{6}$.

4. Commençons par la première inéquation. Elle ne peut jamais être vérifiée si $m < 1$ (le membre de gauche est alors négatif et celui de droite positif). Lorsque $m \geq 1$, on peut élever au carré pour trouver $m^2 - 2m + 1 \geq m^2 - 8m - 20$, soit $6m + 21 \geq 0$, ce qui donne $m \geq -\frac{7}{2}$. Il ne faut garder que les solutions où l'inéquation est définie et où $m \geq 1$, soit $[10, +\infty[$. On procède de même pour la deuxième inéquation : elle est toujours vraie quand $m \geq 1$, et si $m < 1$, on élève au carré pour obtenir de même $m \leq -\frac{7}{2}$. On garde les solutions dans les intervalles $\left] -\infty, -\frac{7}{2} \right]$ et $[10, +\infty[$.

5. On élève l'équation au carré en gardant à l'esprit que les seules solutions valides seront celles pour lesquelles le second membre est initialement positif, c'est-à-dire celles pour lesquelles $x \geq -\frac{1}{2}$. On obtient alors l'équation $x^2 - mx - 2 = 4x^2 + 4x + 1$, qui est exactement l'équation de la question 3. Il reste alors à vérifier que les solutions potentielles de l'équation sont bien supérieures ou égales à $-\frac{1}{2}$, ce qui revient à vérifier que $\frac{m - 4 - \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6} \geq -\frac{1}{2}$, soit $m - 4 - \sqrt{(m+2)(m-10)} \geq -3$, c'est la première inéquation de la question 4. Sans surprise, on aura de même $x_2 \geq -\frac{1}{2}$ si la deuxième inéquation de la question 4 est vérifiée. On peut donc distinguer les cas suivants :

- si $m \in] -2, 10[$, l'équation n'a pas de solutions.
- si $m \in \left] -\frac{7}{2}, -2 \right]$, l'équation n'a toujours pas de solutions car les solutions potentielles ne sont pas dans le bon intervalle.
- si $m \leq -\frac{7}{2}$, seule la solution x_2 est valable : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{m - 4 + \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6} \right\}$
- enfin, si $m \geq 10$, les deux solutions sont valables (il s'agit d'une seule solution double dans le cas particulier où $m = 10$) : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{m - 4 - \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}, \frac{m - 4 + \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6} \right\}$.

Exercice 4

1. Il faut éliminer les réels 0 (à cause de l'inverse dans l'exponentielle) et $\frac{2}{3}$ (à cause du dénominateur) donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\}$.
2. La fonction f est dérivable partout où elle est définie, et $f'(x) = \frac{(2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}})(3x - 2) - 3x^2e^{\frac{1}{x}}}{(3x - 2)^2} = \frac{(3x^2 - 7x + 2)e^{\frac{1}{x}}}{(3x - 2)^2}$. Cette dérivée est du signe de $3x^2 - 7x + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 49 - 24 = 25$, et admet pour racines $x_1 = \frac{7 - 5}{6} = \frac{1}{3}$, et $x_2 = \frac{7 + 5}{6} = 2$. On calcule $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9} \times e^3}{1 - 2} = -\frac{e^3}{9}$, et $f(2) = \frac{4\sqrt{e}}{6 - 2} = \sqrt{e}$. Et on ne fait pas tout de suite le tableau de variations puisqu'il est demandé à la question suivante.
3. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, on en déduit par quotient des termes de plus haut degré que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Quand x tend vers $\frac{2}{3}$, le numérateur de la fonction a une limite finie strictement positive, tout dépend donc du signe du dénominateur, et $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} f(x) = +\infty$. Restent les limites en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ (pas de

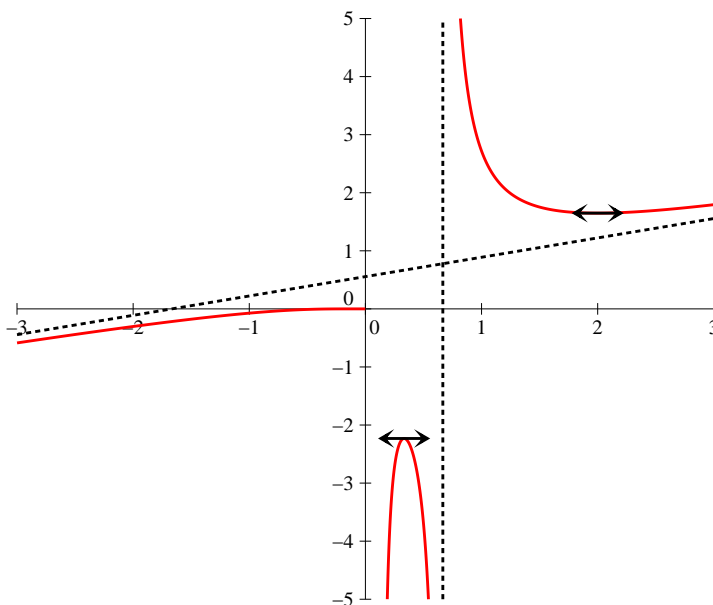
forme indéterminée ici). En 0^+ , on peut poser $X = \frac{1}{x}$ et constater que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$ (croissance comparée classique) pour en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, puis sans difficulté que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (le dénominateur est négatif). On peut compléter notre tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$-\infty$	0	$-\frac{e^3}{9}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

4. Calculons donc $f(x) - (ax + b) = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - (ax + b)(3x - 2)}{3x - 2} = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - 3ax^2 + (2a - 3b)x + 2b}{3x - 2}$.

Manifestement, il y a un problème dans l'énoncé puisqu'on ne pourra jamais se débarrasser de l'exponentielle. En fait, on peut simplement trouver des réels a , b et c tels que $f(x) - (ax + b)e^{\frac{1}{x}}$ soit de la forme souhaitée. Il suffit pour cela de procéder à une identification pour se débarrasser des termes non constants : $1 - 3a = 0$ implique $a = \frac{1}{3}$, puis $2a - 3b = 0$ donne $b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{9}$, et on en déduit que $c = 2b = \frac{4}{9}$. Malheureusement, tout ce qu'on peut déduire facilement de cela, c'est juste que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b)e^{\frac{1}{x}} = 0$, ce qui ne suffit pas à prouver que la droite est une asymptote oblique. En fait, la courbe admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique commune d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$, mais on ne peut pas le prouver facilement avec les outils dont on dispose pour l'instant. On indiquera quand même sur la courbe la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$ comme asymptote oblique à la courbe.

5. Allons-y pour la courbe :



Exercice 5

1. La fonction f est définie lorsque $\text{ch}(x) > 0$, c'est-à-dire tout le temps : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Calculons : $f(0) = 0 + 2\ln(1) = 0$; $f(\ln(2)) = \ln(2) + 2\ln\left(\frac{2 + \frac{1}{2}}{2}\right) = \ln(2) + 2\ln(5) - 2\ln(4) = 2\ln(5) - 3\ln(2)$; et $f(-\ln(3)) = -\ln(3) + 2\ln\left(\frac{\frac{1}{3} + 3}{2}\right) = -\ln(3) + 2\ln(5) - 2\ln(3) = 2\ln(5) - 3\ln(3)$.

3. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 1 + 2\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = 1 + \frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Cette dérivée est du signe de $3e^x - e^{-x} = e^{-x}(3e^{2x} - 1)$. Elle s'annule en particulier lorsque $e^{2x} = \frac{1}{3}$, soit $x = -\frac{1}{2}\ln(3)$ (et $f'(x)$ est négative avant, positive après). On peut s'embêter à calculer $e^{-\frac{1}{2}\ln(3)} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et $e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = \sqrt{3}$ pour en déduire que $f\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = -\frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln(4) - 2\ln(\sqrt{3}) - 2\ln(2) = 2\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3) \simeq -0.25$. Voici une première version du tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	$+\infty$
f	$2\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)$		

4. On peut écrire $\text{ch}(x) = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{2}$ et en déduire que $f(x) = x + 2\ln\left(\frac{e^x(1 + e^{-2x})}{2}\right) = x + 2x + 2\ln(1 + e^{-2x}) - 2\ln(2)$, ce qui correspond exactement à la formule de l'énoncé. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), on en déduit facilement, d'une part que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et d'autre part que la droite d'équation $y = 3x - 2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe (puisque l'écart entre $f(x)$ et cette valeur tend vers 0). La position relative est donnée par le signe de $\ln(1 + e^{-2x})$. Or, e^{-2x} étant toujours positif, ce nombre est lui-même toujours positif : la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

5. C'est extrêmement similaire : $\text{ch}(x) = \frac{e^{-x}(1 + e^{2x})}{2}$, donc $f(x) = -x + 2\ln(1 + e^{2x}) - 2\ln(2)$. Les conclusions sont essentiellement les mêmes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; la droite d'équation $y = -x - 2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$, et la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

6. Et une dernière courbe pour la route, une !

