Devoir Surveillé n°1

PTSI B Lycée Eiffel

24 septembre 2016

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\dfrac{2x+3}{x-1} \leq \dfrac{4x}{2x-3}$.
2. $2\operatorname{ch}(x) + 4\operatorname{sh}(x) = 2$.
3. $|1-x| \leq 2|x| - 3$
4. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ (il est fortement conseillé d'effectuer le changement de variable $X = x + \dfrac{1}{x}$, pour obtenir une équation du second degré en X).

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$. Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de f ?
5. Calculer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en son point d'abscisse e, puis déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T.
6. Tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ et de T dans un même repère.

Exercice 3

On considère l'équation $\sqrt{x^2 + mx - 2} = 2x + 1$, où m est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de x (dépendant de m), l'équation est-elle définie ?
2. Résoudre l'équation lorsque $m = -2$.
3. Résoudre l'équation $3x^2 + (4-m)x + 3 = 0$.
4. Résoudre les inéquations $m - 1 \geq \sqrt{(m+2)(m-10)}$, puis $\sqrt{(m+2)(m-10)} \geq 1 - m$.
5. Conclure en précisant le nombre et l'expression des solutions de l'équation initiale en fonction de la valeur de m.

Exercice 4

On pose dans cet exercice $f(x) = \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{3x-2}$, et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et dresser son tableau de variations complet.
4. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) - (ax+b) = \dfrac{ce^{\frac{1}{x}}}{3x-2}$. En déduire que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}_f$ (on précise que $e^3 \simeq 20$).

Exercice 5

On cherche dans cet exercice à étudier la fonction f définie par $f(x) = x + 2\ln(\mathrm{ch}(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\ln(2))$ et $f(-\ln(3))$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis dresser le tableau de variations de la fonction f (sans les limites pour l'instant).
4. En factorisant $\mathrm{ch}(x)$ par e^x, prouver que $f(x) = 3x - 2\ln(2) + 2\ln(1+e^{-2x})$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis prouver que la droite d'équation $y = 3x - 2\ln(2)$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f quand x tend vers $+\infty$. Préciser la position relative de la courbe et de son asymptote.
5. Effectuer un calcul similaire à celui de la question précédent quand x tend vers $-\infty$, en commençant cette fois-ci par factoriser $\mathrm{ch}(x)$ par e^{-x}.
6. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, ainsi que de ses deux asymptotes obliques.