Devoir Maison n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

1er juin 2017

Algèbre

1. Un projecteur vérifie $p \circ p = p$, en composant par p on a alors $p^3 = p^2$.
2. Un noyau d'une application linéaire étant toujours un sous-espace vectoriel, les ensembles F et G sont bien des sous-espaces. De plus les éléments de F vérifient $u(x) = x$ et ceux de G vérifient $u^2(x) = 0$. Un élément appartenant à $F \cap G$ vérifient donc $u(u(x)) = u(x) = 0$, donc $u(x) = x = 0$, et $F \cap G = \{0\}$. Comme on ne peut pas utiliser de dimension ici, on revient à la définition et on essaye de prouver que $E = F + G$. Soit donc un vecteur $x \in E$, on peut écrire $x = u^2(x) + x - u^2(x)$. En constatant que $(u - \mathrm{id})(u^2(x)) = u^3(x) - u^2(x) = 0$ par hypothèse sur u, on a $u^2(x) \in F$. De même, $u^2(x - u^2(x)) = u^2(x) - u^4(x) = 0$ car $u^4 = u \circ u^3 = u \circ u^2 = u^3 = u^2$. On en déduit que $x - u^2(x) \in G$ et on a bien réussi à décomposer x en somme d'éléments de F et de G, ce qui prouve que $F + G = E$. Finalement, les espaces F et G sont bien supplémentaires.
3. Supposons donc $x \in F$, c'est-à-dire que $u(x) = x$, alors $u^2(x) = u(x)$, ce qui revient exactement à dire que $u(x) \in F$. C'est pareil pour G : si $u^2(x) = 0$, alors $u^3(x) = 0$ donc $u(x) \in G$.
4. Si F est de dimension 3 cela signifie que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifient $u(x) = x$, donc que l'application u est simplement l'application identité.
5. (a) Dans ce cas, comme F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, $\dim(G) = 3 - \dim(F) = 1$. On peut donc trouver un vecteur $x \neq 0$ tel que $G = \mathrm{Vect}(u)$. Par hypothèse, $u^2(x) = 0$. Mais d'après la question 3, on sait également que $u(x) \in G$, donc $u(x) = \lambda x$ (puisque $G = \mathrm{Vect}(x)$) pour un certain réel λ. On en déduit que $u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$. Mais comme $u^2(x) = 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$, et donc $u(x) = 0$. Autrement dit, $x \in \ker(u)$, et $G \subset \ker(u)$. L'implication réciproque est toujours vraie puisque trivialement $u(x) = 0 \Rightarrow u^2(x) = 0$. On a donc bien $G = \ker(u)$.

   (b) Notons donc (y, z) un base quelconque de F (qui est de dimension 2). Comme F et G sont supplémentaires, (x, y, z) est une base de $\mathbb{R}^3$ et par construction on a $u(y) = y$ (c'est le cas de tous les vecteurs de F), $u(z) = z$ et (cf plus haut) $u(x) = 0$. Autrement dit, la matrice de u dans cette base est la suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit très facilement que u est un projecteur (manifestement, cette matrice est égale à son carré) et même plus précisément la projection sur F parallèlement à G.
6. (a) Par définition, les vecteurs de G vérifient $u^2(x) = 0$, donc $v \circ v = 0$.

   (b) Puisque G est un espace vectoriel de dimension 2, le rang de v ne peut être plus grand que 2. Supposons qu'il soit égal à 2, cela revient à dire que v est un endomorphisme surjectif, et donc bijectif, de l'espace vectoriel G. Mais alors $v \circ v$ est lui-même bijectif, ce qui est évidemment exclu puisque $v^2 = 0$. On en déduit que v ne peut être de rang 2, et donc qu'il est de rang 0 ou 1.

   (c) Si v est de rang 1, il existe donc un vecteur dans G, que l'on va noter y tel que $v(y) \neq 0$ (sinon l'image serait réduite au vecteur nul, et v ne serait pas de rang 1). On peut noter

$z = v(y)$, le vecteur z appartient certainement à G (question 3) et vérifie $v(z) = 0$ puisque $v \circ v = 0$. De plus, la famille (z, y) est nécessairement libre : si on avait $z = \lambda y$ (avec forcément $\lambda \neq 0$ puisque $z \neq 0$), alors on aurait $v^2(y) = \lambda^2 y \neq 0$. Cette famille est donc une base de G et, par définition, la matrice de v dans cette base est celle demandée par l'énoncé.

(d) Dans le cas où v est de rang 1, il suffit de compléter la famille (z, y) en une base de E en prenant un troisième vecteur $x \in F$ qui vérifie par définition $f(x) = x$. Dans la base (x, z, y) (c'est plus pratique de les mettre dans cet ordre-là), la matrice de u sera la suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons que dans ce cas, l'application u n'est pas un projecteur.

Dans le cas où v est de rang 0, c'est encore plus simple, on prend n'importe quelle base de G (u sera de toute façon nulle sur G) et on la complète avec un vecteur de F pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette fois-ci, u est la projection sur F parallèlement à G.

7. (a) Comme $\dim(G) = 3$, on a dans ce cas $u^2 = 0$. L'application u ne peut donc clairement pas être de rang 3 puisqu'elle serait alors bijective, et u^2 également. Le cas plus compliqué est celui du rang 2. Si on avait $\mathrm{rg}(u) = 2$, d'après le théorème du rang, on aurait $\dim(\ker(u)) = 3 - 2 = 1$. On pourrait donc trouver un vecteur x appartenant à l'image de u mais pas à son noyau. Un tel vecteur pourrait s'écrire $x = u(y)$ (puisqu'il est dans l'image), mais vérifierait $u(x) \neq 0$. C'est impossible car on aurait alors $u^2(y) \neq 0$. Le rang 2 est donc exclu, et il ne reste que les possiblités d'un rang 0 ou 1.

(b) Choisissons pour commencer un vecteur x formant une base de l'image de u (qui est de dimension 1). Ce vecteur vérifie nécessairement $u(x) = 0$ puisque $x = u(w)$ et qu'on doit avoir $u^2(w) = 0$. Complétons ce vecteur en une base du noyau en lui adjoignant un deuxième vecteur y (le noyau est de dimension 2 par application du théorème du rang). Enfin, complétons cette famille en une base à l'aide d'un troisième vecteur z n'appartenant pas au noyau. Puisque $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(x)$, on a donc $u(z) = \lambda x$ pour un certain réel $\lambda \neq 0$. Quitte à remplacer z par $\frac{1}{\lambda} z$, on peut en fait imposer $\lambda = 1$, c'est-à-dire $u(z) = x$. La matrice de u dans la base (x, y, z) est alors la suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Encore un cas où u n'est pas un projecteur.

8. Autant travailler avec les matrices. En notant M la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. On calcule sans difficulté $M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = M^2$, ce qui prouve que $u^3 = u^2$. Déterminons l'espace vectoriel F en résolvant le système (en multipliant tout par 2) : $\begin{cases} -x - y = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$. On déduit de la première équation que $y = -x$, puis on reporte dans les deux autres : $4x - 4z = 2x - 2z = 0$, soit $z = x$. Finalement, $F = \mathrm{Vect}((1, -1, 1))$. Pour déterminer G, on repart de la matrice M^2 qui est celle de l'endomorphisme u^2, et on voit de façon évidente que le noyau est déterminé par l'unique équation $-x - y + 2z = 0$, soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, ou encore $G = \mathrm{Vect}((2, 0, 1); (1, 0, 2))$. On est dans la situation de la question 6. Pour savoir si l'endomorphisme v onduit par u sur G est de rang 0 ou 1, calculons simplement $v(2, 0, 1) = u(2, 0, 1) = (1, 1, 1)$. Cette image n'étant manifestement pas nulle, v est de rang 1, et on est dans le cas de la question 6.*c*. Avec les notations de cette question, on peut prendre $y = (2, 0, 1)$, $z = (1, 1, 1)$ puis $x = (1, -1, 1)$ et la

matrice de u dans la base (x, z, y) sera celle décrite au début de la question 6.d (vous pouvez vérifier à grands coups de matrices de passage si ça vous amuse).

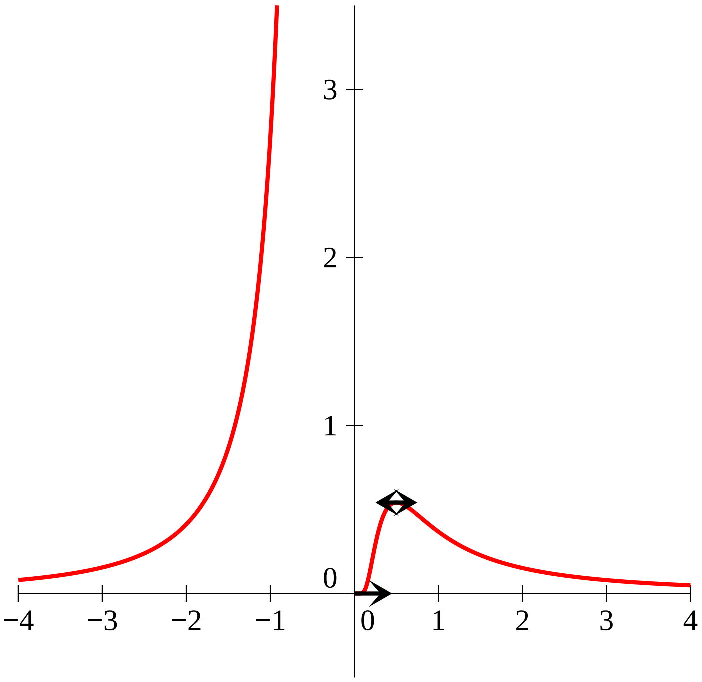
Analyse

Première partie : étude de f.

1. L'indication est particulièrement vicieuse puisqu'on ne peut pas faire de développement limité en 0 de cette fonction. Pas grave, la fonction est continue à droite en 0 par croissance comparée, et son taux d'accroissement $\tau(h) = \dfrac{1}{h^3}e^{-\frac{1}{h}}$ tend vers 0 (toujours à droite en 0) toujours par croissance comparée, donc f est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = 0$. À gauche, aucun expoir, puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.
2. Pour les limites, il ne reste plus qu'à voir ce qui se passe aux infinis. Pas de difficulté, puis $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on va bien sûr étudier les variations en calculant $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante ensuite, avec un maximum local égal à $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4e^{-2} = \dfrac{4}{e^2}$. Voici le tableau de variations demandé :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ | 0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3. Et voici la courbe :



Une équation différentielle.

1. La normalisation impose effectivement de résoudre sur les intervalles donnés : $y'+\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)y=0$. L'équation étant homogène, elle se résout immédiatement : sur $]0,+\infty[$, on obtient $y(x)=Ke^{-2\ln(x)-\frac{1}{x}}=Kf(x)$, avec $K\in\mathbb{R}$. Sur $]-\infty,0[$, on obtient en fait exactement les même formules : $y(x)=Lf(x)$, avec $L\in\mathbb{R}$.
2. (a) En remplaçant simplement x par 0 dans l'équation, on a $-y(0)=0$, donc $y(0)=0$.
   (b) Pour le morceau de droite, on aura aucun problème puisque toutes les solutions sur l'intervalle $]0,+\infty[$ sont prolongeables en 0 en fonction dérivables (c'est le calcul effectué à la première question de l'exercice). Par contre, à gauche, la seule fonction qui a une limite nulle en 0, c'est la solution nulle, et elle est évidemment dérivable en 0. La condition recherchée est donc, avec les notations précédentes, $L=0$.
   (c) Il s'agit de toutes les fonctions définies par : $\forall x\leq 0$, $y(x)=0$, et $\forall x>0$, $y(x)=Kf(x)$, où K est un réel quelconque.

Dérivées successives de f.

1. On a déjà calculé f', continuons : $f''(x)=\frac{-2x^4-4x^3(1-2x)}{x^8}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1-2x}{x^6}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1-6x+6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x}}$.
   Et allons-y pour un tour de plus : $f^{(3)}(x)=\frac{(12x-6)x^6-6x^5(1-6x+6x^2)}{x^{12}}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1-6x+6x^2}{x^8}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1-12x+36x^2-24x^3}{x^8}e^{-\frac{1}{x}}$. Superbe.
2. On va évidemment procéder par récurrence. La propriété étant déjà vérifiée aux rangs 0 (avec $P_0=1$), 1, 2 et 3, prouver l'hérédité sera largement suffisant. Supposons donc que $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+2}}$, alors $f^{(n+1)}(x)=\frac{P_n'(x)x^{2n+2}-(2n+2)x^{2n+1}P_n(x)}{x^{4n+4}}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{P_n(x)}{x^{2n+4}}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{P_n(x)+x^2P_n'(x)-(2n+2)xP_n(x)}{x^{2n+4}}e^{-\frac{1}{x}}$, ce qui prouve la propriété au rang suivant en posant $P_{n+1}=(1-(2n+2)x)P_n+x^2P_n'$.
3. On a déjà signalé que $P_0=1$ et les calculs de la première question assurent que $P_1=1-2X$, puis $P_2=1-6X+6X^2$ et enfin $P_3=1-12X+36X^2-24X^3$.
4. On conjecture assez facilement que P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$. C'est en tout cas le cas lorsque $n\leq 3$. Prouvons-le par récurrence : si P_n a pour terme dominant $(-1)^n(n+1)!x^n$, alors P_n' a pour terme dominant $(-1)^n n(n+1)!x^{n-1}$, et le terme de degré $n+1$ de P_{n+1} se calcule à l'aide de la relation de récurrence : $-(2n+2)\times(-1)^n(n+1)!x^{n+1}+(-1)^n n(n+1)!x^{n+1}=(-1)^n(n+1)!x^{n+1}(-2n-2+n)=(-1)^{n+1}(n+2)!x^{n+1}$, exactement ce qu'on voulait prouver.
5. Autrement dit, $g(x)=e^{-\frac{1}{x}}$. Puisque $g'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=f(x)$, la relation demandée est évidente.
6. Appliquons donc la formule de Leibniz au rang $n+1$ à l'égalité $x^2f(x)=g(x)$ pour obtenir $f^{(n)}(x)=g^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(x^2)^{(k)}f^{(n+1-k)}(x)=x^2f^{(n+1)}(x)+(2n+2)xf^{(n)}(x)+n(n+1)f^{(n-1)}(x)$. En remplaçant par les expressions découlant du résultat de la question 2, on a donc $\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{(2n+2)P_n(x)}{x^{2n+1}}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{n(n+1)P_{n-1}(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$. En simplifiant tout ce qu'on peut, on a $P_n=P_{n+1}+(2n+2)XP_n+n(n+1)X^2P_{n-1}$.
7. Il suffit de remplacer le P_{n+1} par l'expression obtenue à la question 2, et il ne reste plus que $0=x^2P_n'+n(n+1)X^2P_{n-1}$, ce qui donne bien $P_n'=-n(n+1)P_{n-1}$.

8. On va procéder par récurrence sur l'entier k (l'entier n étant fixé). La relation est triviale pour $k = 0$, et accessoirement vraie pour $k = 1$ (c'est ce qu'on vient de démontrer à la question précédente). Supposons donc que la relation est vraie au rang k, et dérivons-là : $P_n^{(k+1)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} P'_{n-k}$. Or, d'après la question précédente, $P'_{n-k} = -(n-k)(n-k+1)P_{n-k-1}$, et il ne reste qu'à introduire ceci dans l'équation précédente pour obtenir la relation au rang $k+1$ (le facteur $n-k$ se simplifiant avec le $(n-k)!$ du premier dénominateur, et le facteur $n-k+1$ avec le $(n+1-k)!$ du deuxième dénominateur).
9. Remplaçons brillamment x par 0 dans l'égalité précédente : $P_n^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$ (la valeur de tous nos polynômes en 0 est égale à 1, ce qui se prouve par récurrence évidente à partir de la relation de récurrence de la question 2). En appliquant la formule de Taylor pour les polynômes, on en déduit que $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^k$.
10. Si a est racine double de P_n, alors $P_n(a) = P'_n(a) = 0$. On peut alors utilsier la relation de la question 2 pour en déduire que $P_{n+1}(a) = 0$. De plus, $P'_{n+1} = -(n+1)(n+2)P_n$ (relation de la question 7), donc a est aussi racine (et même racine double) de P'_{n+1} et donc racine double de P_{n+1}. En reprenant la relation de la question 2 et en la dérivant, on constate alors que tous ses termes s'annulent en a sauf éventuellement le terme $x^2 P''_n$ obtenu en dérivant $x^2 P'_n$. Ce dernier terme doit donc s'annuler également, et comme $a \neq 0$ (on a déjà signalé que nos polynômes valaient 1 en 0), on doit avoir $P''_n(a) = 0$. Autrement dit, a est racine double de P'_n et donc de P_{n-1} (à cause de la relation de la question 7). On peut alors prouver facilement qu'aucun de nos polynômes n'admet de racines double : supposons en effet qu'il existe un entier n pour lequel P_n admet une racine double, et considérons alors le plus petit entier n_0 pour lequel cela se produit. On a forcément $n_0 \geq 2$ puisque P_{n_0} est de degré n_0, mais on vient de prouver que, dans ce cas, P_{n_0-1} admet lui aussi une racine double, ce qui contredit la minimalité de l'entier n_0. Tous nos polynômes admettent donc uniquement des racines simples, et sont bien entendu scindés dans $\mathbb{C}[X]$ puisque tous les polynômes le sont (théorème de d'Alembert-Gauss).