Devoir Maison n°7 (révisions)

PTSI B Lycée Eiffel

8 mai 2017

Algèbre

On considère dans tout ce problème un endomorphisme u d'un espace vectoriel réel vérifiant $u^3 = u^2$.

1. Prouver que tous les projecteurs de E vérifient l'hypothèse de ce problème.
2. On note $F = \ker(u - \mathrm{id})$ et $G = \ker(u^2)$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
3. Montrer que F et G sont stables par u (c'est-à-dire que, $\forall x \in F$, $u(x) \in F$, et de même pour G).
4. On se place désormais dans $\mathbb{R}^3$ et on conserve les mêmes notations. Que peut-on dire de u dans le cas où F est de dimension 3 ?
5. On suppose dans cette question que $\dim(F) = 2$.
   (a) Montrer que $G = \ker(u)$.
   (b) Écrire la matrice de u dans une base adaptée aux sous-espaces F et G. Que peut-on dire de l'application linéaire u ?
6. On suppose dans cette question que $\dim(F) = 1$, et on note v l'endormorphisme de l'espace G obtenu en restreignant u à l'ensemble G.
   (a) Que vaut $v \circ v$?
   (b) Montrer que le rang de v est égal à 0 ou à 1.
   (c) Dans le cas où v est de rang 1, prouver qu'il existe une base de G dans laquelle la matrice représentative de v est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Déterminer, selon la valeur du rang de v, des matrices représentatives les plus simples possibles de l'endomorphisme u (on expliquera bien sûr comment obtenir les bases correspondantes).
7. On suppose enfin dans cette question que $\dim(F) = 0$.
   (a) Montrer que le rang de u est nécessairement égal à 0 ou 1.
   (b) Dans le cas où u est de rang 1, trouver une matrice représentative de u la plus simple possible (on s'inspirera des questions précédentes).
8. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(x, y, z) = \left(\dfrac{x - y}{2}; \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}y - 2z; \dfrac{x - y}{2}\right)$.
   Vérifier que u est bien un endomorphisme pour lequel $u^3 = u^2$, puis déterminer les espaces F et G associés à cet endomorphisme. Préciser à quel cas de l'étude précédente correspond l'application u, puis donner explicitement une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est la plus simple possible.

Analyse

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, qu'on prolonge en 0 en posant $f(0) = 0$.

Première partie : étude de f.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 (on a bien sûr le droit d'utiliser un développement limité).
2. Étudier les limites et variations de f (on en dressera un tableau de variations complet).
3. Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Une équation différentielle.

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle $x^2y' + (2x-1)y = 0$.

1. Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Supposons que y est une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   (a) Que vaut nécessairement $y(0)$?
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions obtenues à la question 1 puissent se recoller en une fonction dérivable en 0.
   (c) En déduire les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.

Dérivées successives de f.

1. Calculer f', f'' et $f^{(3)}$ (sur les intervalles où elles sont définies).
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+2}}$.
   On en profitera pour donner une expression de P_{n+1} en fonction de P_n et de P_n'.
3. Donner les expressions de P_0, P_1, P_2 et P_3.
4. Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant (en justifiant, bien entendu).
5. On pose $g(x) = x^2 f(x)$. Montrer que, pour tout entier n, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.
6. En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, une relation entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.
7. Montrer que $P_n' = -n(n+1)P_{n-1}$.
8. Montrer plus généralement que, si $k \leq n$, $P_n^{(k)} = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!} \dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!} P_{n-k}$.
9. En déduire la valeur de $P_n^{(k)}(0)$, puis une expression explicite de P_n.
10. Soit a une racine de P_n de multiplicité supérieure ou égale à 2. Montrer que a est (au moins) racine double de P_{n-1} en utilisant certaines des relations démontrées précédemment. En déduire que le polynôme P_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.