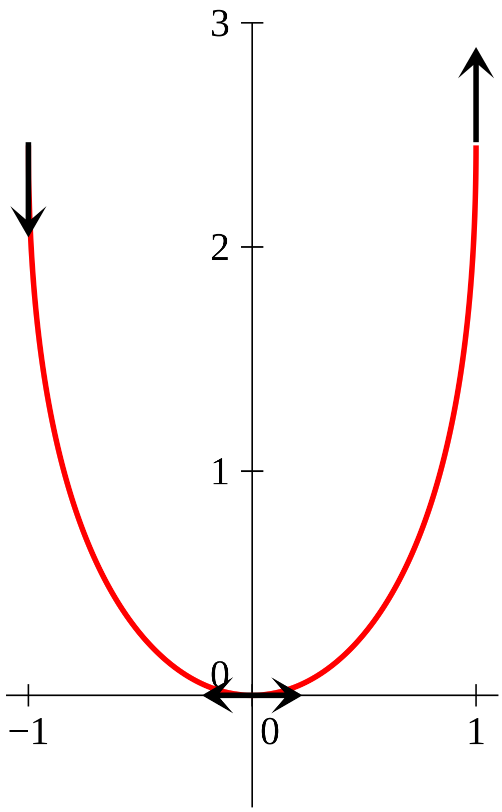
Devoir Maison n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 mai 2017

Exercice 1

1. La fonction est évidemment définie, comme arcsin, sur $[-1, 1]$. Elle sera certainement dérivable sur $]-1, 1[$, mais on risque d'avoir des soucis en -1 et en 1. Commençons donc par calculer la dérivée sur l'intervalle ouvert : $f'(x) = \dfrac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Comme $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ ne sont pas nuls, la dérivée f' admet des limites infinies en 1 et en -1, et la fonction f n'y est donc pas dérivable. On aura par contre deux demi-tangentes verticales aux extrémités de l'intervalle de définition.
2. La dérivée f' est clairement du signe de $\arcsin(x)$, qui est le même que celui de x. La fonction admet un minimum en 0, de valeur 0. Précisons les valeurs $f(-1) = f(1) = \dfrac{\pi^2}{4}$. Une allure rapide de courbe (il n'y a pas grand chose à indiquer) :



3. Le cours nous donne $\arcsin(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, il suffit d'élever au carré pour trouver $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$.

4. (a) Calculons donc (la fonction f' est certainement dérivable sur $]-1,1[$) :
$f''(x) = \dfrac{2 - 2\arcsin(x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{2 + xf'(x)}{1-x^2}$. On a donc $(1-x^2)f'' - xf' = 2$.

(b) Écrivons donc $f''(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$. Toutes nos fonction étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on peut bien les développer à l'ordre qu'on veut. En primitivant le développant précédent, on en déduit que f', qui s'annule en 0, admet un DL3 en 0 de la forme $f'(x) = ax + \dfrac{b}{2}x^2 + \dfrac{c}{3}x^3 + o(x^3)$. Introduisons ces développements dans le membre de gauche de notre équation différentielle, en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 2 (les autres ne sont de toute façon pas significatifs) : $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = (1-x^2)(a + bx + cx^2 + o(x^2)) - x(ax + o(x)) = a + bx + cx^2 - ax^2 - ax^2 + o(x^2) = a + bx + (c-2a)x^2 + o(x^2)$. Cette expression étant égale à 2, par unicité du développement limité, on doit avoir $a = 2$, $b = 0$ et $c - 2a = 0$, soit $c = 4$. On a donc $f''(x) = 2 + 4x^2 + o(x^2)$, puis $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$, et enfin, f s'annulant elle aussi en 0, on retrouve $f(x) = x^2 + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$.

5. (a) Contentons-nous d'écrire le terme d'ordre $k = 2$ du DL dans notre équation différentielle : le terme en $(1-x^2)f''$ va contribuer pour $a_{k+2}x^{k+2} - a_k x^{k+2}$, et le terme en $-xf'(x)$ va contribuer pour $-a_k \dfrac{x^{k+2}}{k+1}$ (puisque $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$), donc par identification avec le second membre de l'équation qui a un coefficient nul pour x^{k+2}, on doit avoir $a_{k+2} - a_k - \dfrac{a_k}{k+1} = 0$, soit $a_{k+2} = \dfrac{k+2}{k+1}a_k$.

(b) La fonction f étant paire, f' est impaire et f'' paire, donc tous les coefficients a_{2p+1} sont nuls (ce qui est d'ailleurs cohérent avec la relation de récurrence obtenue). Pour les coefficients d'indice pair, on va réécrire la relation sous la forme $a_{2p+2} = \dfrac{2p+2}{2p+1}a_{2p}$, avec comme condition initiale $a_0 = 2$. On a donc $a_{2p} = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)} \times 2 = \dfrac{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \cdots \times (2p)^2}{(2p)!} \times 2 = \dfrac{((2\times 1) \times (2 \times 2) \times \cdots \times (2 \times p))^2 \times 2}{(2p)!} = \dfrac{2^{2p+1}p!^2}{(2p)!}$. On peut donc écrire $f''(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{2^{2p+1}p!^2}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2n+1})$, puis en primitivant deux fois on trouvera $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{2^{2p+1}p!^2}{(2p+2)!}x^{2p+2} + o(x^{2n+3})$. On est allés un peu au-delà de ce qui était demandé !

Exercice 2

1. Si on veut le prouver rigoureusement, il faut revenir à la définition. Soient donc (x,y,z) et (x',y',z') deux vecteurs de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) = u(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (3\lambda y + 3y' - 2\lambda z - 2z'; -6\lambda a - 6x' + 9\lambda y + 9y' - 4\lambda z - 4z'; -6\lambda x - 6x' + 6\lambda y + 6y' - \lambda z - z') = \lambda(3y - 2z, -6x + 9y - 4z, -6x + 6y - z) + (3y' - 2z', -6x' + 9y' - 4z', -6x' + 6y' - z') = \lambda u(x,y,z) + u(x',y',z')$, ce qui prouve la linéarité de l'application u. Comme elle est par ailleurs à valeurs dans E, il s'agit bien d'un endomorphisme.

Calculons ensuite $u^2(x,y,z) = (3(-6x+9y-4z) - 2(-6x+6y-z); -6(3y-2z) + 9(-6x+9y-4z) - 4(-6x+6y-z); -6(3y-2z) + 6(-6x+9y-4z) - (-6x+6y-z)) = (-6x+15y-10z; -30x+39y-20z; -30x+30y-11z)$. Or, $5u(x,y,z) = (15y-10z, -30x+45y-20z, -30x+30y-5z)$, et on retrouve bien l'expression précédente en ajoutant $-6(x,y,z)$, ce qui prouve que $u^2 = 5u - 6\,\mathrm{id}$.

2. Il suffit de modifier légèrement l'égalité précédente : $5u - u^2 = 6\,\mathrm{id}$, soit $u \circ \left(\frac{5}{6}\,\mathrm{id} - \frac{1}{6}u\right) = \mathrm{id}$, ce qui prouve à la fois que u est bijectif (donc un automorphisme de E) et que son automorphisme réciproque est donné par $u^{-1} = \frac{5}{6}\,\mathrm{id} - \frac{1}{6}u$, donc $u^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{5}{6}x, \frac{5}{6}y, \frac{5}{6}z\right) - \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z; -x + \frac{3}{2}y - \frac{2}{3}z; -x + y - \frac{1}{6}z\right) = \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z; x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z; x - y + z\right)$.

3. On a $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow u(x, y, z) = (3x, 3y, 3z)$, ce qui nous mène au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -6x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \\ -6x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. Système qui sera vite résolu puisque les trois équations sont équivalentes. On peut simplement en tirer $z = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y$, donc $F = \mathrm{Vect}((2, 0, -3); (0, 2, 3))$. De même, la détermination de G se ramène à l'équation $u(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, et donc au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -6x & + & 7y & - & 4z & = & 0 \\ -6x & + & 6y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. La différence des deux dernières équations donne $y - z = 0$, soit $z = y$, et les deux premières équations deviennent alors $-2x + y = -6x + 3y = 0$, ce sont des équations équivalentes, on en tirera simplement que $y = 2x$. On peut conclure : $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 2))$.

4. Vérifions déjà que p est un projecteur : $p^2 = (3\,\mathrm{id} - u)^2 = 9\,\mathrm{id} - 6u + u^2 = 9\,\mathrm{id} - 6u + 5u - 6\,\mathrm{id} = 3\,\mathrm{id} - u = p$ en exploitant la relation démontrée en question 1. L'application p est donc bien une projection, nécessairement parallèlement à F puisque par définition $F = \ker(p)$. De plus, $a \in G \Leftrightarrow u(a) = 2a \Leftrightarrow 3a - u(a) = a$, soit $p(a) = a$, ce qui est caractéristiques des éléments de l'image de p. Notre projecteur projette bien sur G parallèlement à F. Le calcul est très similaire pour q : $q^2 = u^2 - 4u + 4\,\mathrm{id} = u - 2\,\mathrm{id} = q$, donc q est une projection parallèlement à G qui est son noyau. De plus $q(a) = a \Leftrightarrow p(a) = 0$ donc $\mathrm{Im}(q) = F$.

5. C'est un calcul idiot : $u \circ q = u^2 - 2u = 3u - 6\,\mathrm{id} = 3q$ (et les deux applications commutent clairement), et $u \circ p = 3u - u^2 = -2u + 6\,\mathrm{id} = 2p$.

6. On va bien sûr procéder par récurrence. Au rang 0, on a $3^0 q + 2^0 p = q + p = u - 2\,\mathrm{id} + 3\,\mathrm{id} - u = \mathrm{id} = u^0$, donc ça marche. Si on suppose maintenant la propriété vérifiée au rang n, alors $u^{n+1} = u \circ (3^n q + 2^n p) = 3^n u \circ q + 2^n u \circ p = 3^{n+1} q + 2^{n+1} p$ d'après les calculs de la question précédente.

7. Regardons déjà ce qui se passe pour $n = -1$: $\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}p = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}\,\mathrm{id} + \frac{3}{2}\,\mathrm{id} - \frac{1}{2}u = -\frac{1}{6}u + \frac{5}{6}u$, ce qui correspond bien à la relation obtenue pour u^{-1}. En posant $v = u^{-1}$, on prouve alors très facilement par récurrence que la formule reste correcte : $v^n = \frac{1}{3^n}q + \frac{1}{2^n}p$.

Exercice 3

1. Pour factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, il suffit de déterminer les six racines sixièmes de -1, qui sont de la forme $e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})}$. Autrement dit, on a pour racines $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_4 = -z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_5 = -i$ et $z_6 = -z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Le polynôme étant unitaire, sa factorisation est donc $\prod_{i=1}^{6}(X - z_i)$ (non, je ne vais pas tout réécrire explicitement). Pour la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les trois paires de racines conjuguées, qui ont toutes pour module 1 et pour parties réelles $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 0, ce qui donne $X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

2. Le polynôme par lequel on divise étant de degré 5, le quotient sera donc de degré 1, et la division s'écrira sous la forme $X^6+1=(aX+b)(X+1)^3(X^2+X+1)+R(X)$, avec R de degré inférieur ou égal à 4. Pour déterminer notre quotient, il suffit d'isoler dans cette égalité les termes de degrés 5 et 6 : $X^6=aX^6+bX^5+aX^5+3aX^5$ (ce dernier terme étant issu du triple produit dans le cube, multiplié par le X^2 de la dernière parenthèse), soit $X^6=aX^6+(b+4a)X^5$. Par identification, on doit donc avoir $a=1$ et $b=-4$, soit un quotien égal à $X-4$.

3. En multipliant l'égalité par x^2+x+1, on obtient $\dfrac{x^6+1}{(x+1)^3}=q(x)(x^2+x+1)+\dfrac{a(x^2+x+1)}{x+1}+\dfrac{b(x^2+x+1)}{(x+1)^2}+\dfrac{c(x^2+x+1)}{(x+1)^3}+dx+e$. On a évidemment envie d'évaluer cette égalité pour des valeurs de x annulant x^2+x+1, mais ce trinôme a des racines complexes. Eh ben pas grave, on peut quand même ! Il a pour discriminant $\Delta=-3$ et pour racines $z_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Remarquons que $(z_1+1)^3=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=(e^{i\frac{\pi}{3}})^3=-1$, et de même pour $(z_2+1)^3$ (qui est aussi égal à -1). Par ailleurs, $z_1^6=z_2^6=1$. En remplaçant dans notre égalité pour $x=z_1$, on trouve donc $-2=dz_1+e$, et $-2=dz_2+e$. On en déduit très facilement que $d=0$ et $e=-2$ (tout ça pour ça).

4. (a) Faisons donc ce qui nous est demandé : $g(x)=\dfrac{x^6+1}{x^2+x+1}=\dfrac{(h-1)^6+1}{(h-1)^2+h-1+1}=\dfrac{h^6-6h^5+15h^4-20h^3+15h^2-6h+2}{h^2-h+1}=\dfrac{2-6h+15h^2+o(h^2)}{1-h+h^2}=(2-6h+15h^2)(1+h-h^2+h^2)+o(h^2)=2-6h+15h^2+2h-6h^2+o(h^2)=2-4h+9h^2+o(h^2)$.

   (b) En reprenant l'expression de la question 3, on a $g(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c+\left(q(x)+\dfrac{dx+e}{x^2+x+1}\right)(x+1)^3$, soit en posant à nouveau $h=x+1$, $g(x)=c+bh+ah^2+o(h^2)$ (puisqu'il y a un h^3 en facteur de termes qui ne tendent pas vers 0). Une simple identification (puisque le DL est unique) donne immédiatement $c=2$, $b=-4$ et $a=9$. On peut donc conclure : $f(x)=x-4+\dfrac{9}{x+1}-\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^3}-\dfrac{2}{x^2+x+1}$.

5. Cette question est un peu une arnaque puisque l'expression précédente permet trivialement de prouver que la droite d'équation $y=x-4$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ (et d'ailleurs aussi en $-\infty$). Mais bon, faisons comme si de rien n'était et posons joyeusement $X=\dfrac{1}{x}$, puis écrivons $f\left(\dfrac{1}{X}\right)=\dfrac{1}{X}-4+\dfrac{9X}{1+X}-\dfrac{4X^2}{1+2X+X^2}+\dfrac{2X^3}{1+3X+3X^2+X^3}-\dfrac{2X^2}{1+X+X^2}$. Seul le terme en X est intéressant pour obtenir la position relative par rapport à l'asymptote et il est trivial : $f\left(\dfrac{1}{X}\right)=\dfrac{1}{X}-4+9X+o(X)$, soit $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}x-4+\dfrac{9}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et $f(x)-(x-4)\sim\dfrac{9}{x}>0$ si x est au voisinage de $+\infty$, donc la courbe représentative de f sera donc au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

6. On va bien sûr partir de la décomposition en éléments simples. Tous les morceaux sont triviaux à intégrer, sauf le dernier qu'on va donc détailler : $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1}$ a pour primitive $\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$. Une primitive de f est donc $F:x\mapsto\dfrac{1}{2}x^2-4x+9\ln(|x+1|)+\frac{4}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.