Devoir Maison n°6

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 2 mai

Exercice 1

On pose $f(x) = \arcsin^2(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f, préciser son domaine de dérivabilité (en justifiant rigoureusement), et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f, et tracer une allure de sa courbe représentative.
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f (en utilisant les formules du cours).
4. On va chercher dans cette question une autre méthode de calcul du $DL_4(0)$ de f.
   (a) Calculer f'', puis déterminer une équation différentielle du second ordre (à coefficients non constants) vérifiée par f.
   (b) En partant du fait que le $DL_2(0)$ de f'' peut s'écrire $f''(x) = a+bx+cx^2+o(x^2)$, en déduire les valeurs des constantes a, b et c en exploitant l'équation différentielle précédemment obtenue, puis retrouver le $DL_4(0)$ de f.
5. On souhaite généraliser les résultats de la question précédente.
   (a) En supposant que $f''(x) = P(x) + o(x^n)$, avec $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, déterminer une relation entre les coefficients a_k et a_{k+2} du polynôme P (en exploitant toujours l'équation différentielle).
   (b) En déduire l'expression de a_k (on distinguera les entiers pairs et impairs), puis écrire le $DL_{2n}(0)$ de f pour tout entier n.

Exercice 2

On note dans tout l'exercice $E = \mathbb{R}^3$, et on étudie l'application $u : E \to E$ définie par $u(x, y, z) = (3y - 2z; -6x + 9y - 4z; -6x + 6y - z)$. On pose également $p = 3\,\mathrm{id} - u$ et $q = u - 2\,\mathrm{id}$, et on note $F = \ker(p)$ et $G = \ker(q)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E, et vérifier que $u \circ u = 5u - 6\,\mathrm{id}$.
2. En déduire que u est un automorphisme, puis déterminer l'automorphisme réciproque u^{-1}, d'abord en fonction de u, puis explicitement.
3. Calculer F et G (on donnera en particulier une base de chacun de ces espaces).
4. Montrer que p est le projecteur sur G parallèlement à F, et que q est le projecteur sur F parallèlement à G.
5. Montrer que $u \circ q = q \circ u = 3q$ et $u \circ p = p \circ u = 2p$.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u^n = 3^n q + 2^n p$.
7. L'égalité précédente reste-t-elle vraie si $n < 0$ (on justifiera évidemment soigneusement la réponse) ?

Exercice 3

On note dans cet exercice $f(x) = \dfrac{x^6+1}{(x+1)^3(x^2+x+1)}$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme X^6+1.
2. Calculer le quotient Q de la division euclidienne du polynôme X^6+1 par $(X+1)^3(X^2+X+1)$ (on évitera de poser brutalement la division, en écrivant la division théorique, peu de calculs sont nécessaires).
3. Le théorème de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles assure l'existence de cinq réels a, b, c, d et e tels que $f(x) = q(x) + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{(x+1)^3} + \dfrac{dx+e}{x^2+x+1}$. Déterminer les coefficients d et e (sans chercher pour l'instant à calculer les autres).
4. On pose $g(x) = (x+1)^3 f(x)$.
   (a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en -1 de la fonction g (on pourra poser $x = h-1$ pour se ramener à une variable tendant vers 0).
   (b) En déduire soigneusement les valeurs des constantes a, b et c.
5. Effectuer l'étude locale de f au voisinage de $+\infty$.
6. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.