Devoir Maison n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

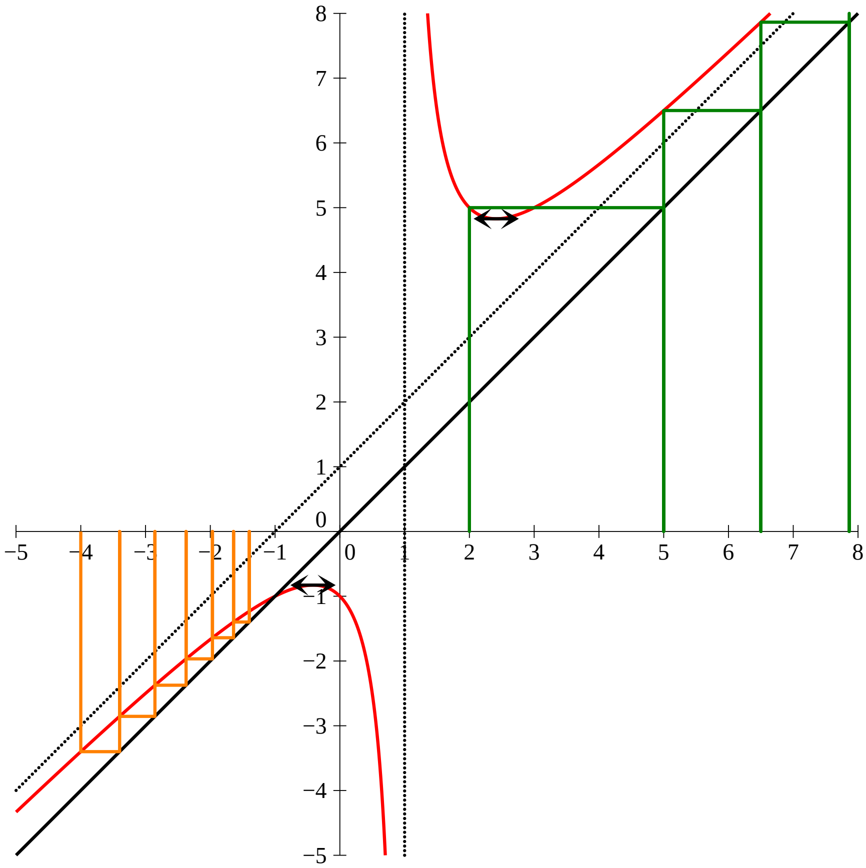
7 mars 2017

Exercice 1 : suites récurrentes

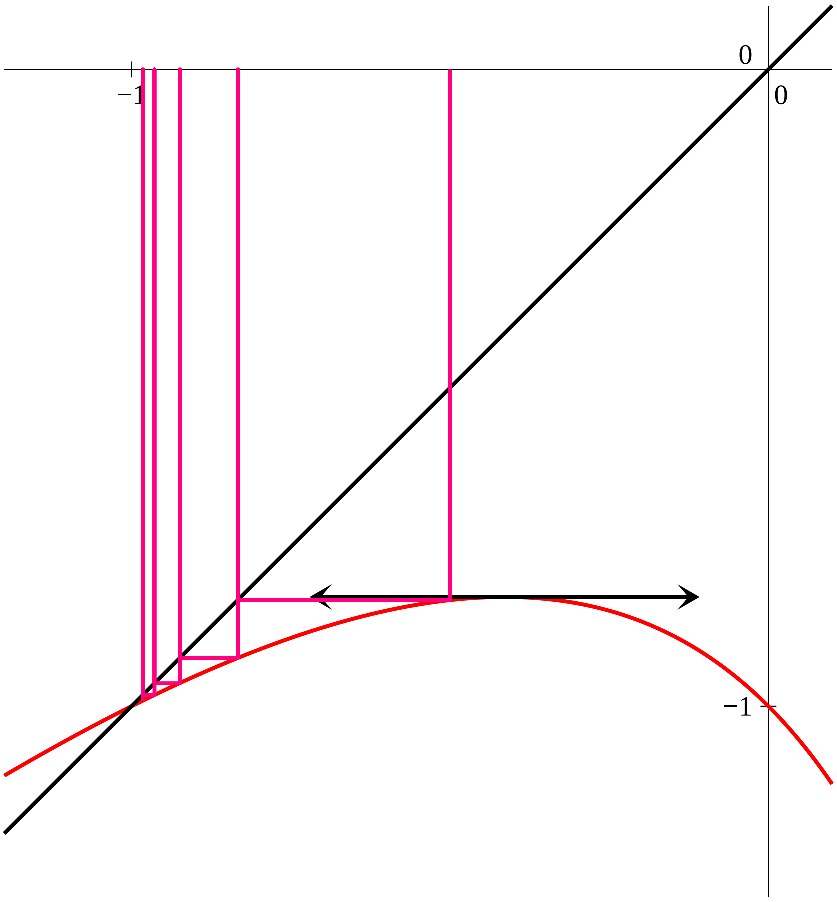
1. La fonction f est clairement définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ en tant que fonction rationnelle. Elle n'a pas de parité notable. On peut immédiatement constater (ça simplifie bien la suite des calculs) que $f(x) = \dfrac{x^2-1+2}{x-1} = x+1+\dfrac{2}{x-1}$. Cette forme permet en particulier de constater très facilement que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ comme en $-\infty$. Il y a également bien entendu une asymptote verticale d'équation $x = 1$ (les calculs de limite sont tous évidents et ne seront pas détaillés). Intéressons donc aux variations de f : $f'(x) = 1-\dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. Elle est du signe de x^2-2x-1, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 4+4 = 8$, et les racines sont $x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$, et $x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$. On calcule en passant $f(1-\sqrt{2}) = \dfrac{1+1-2\sqrt{2}+2}{-\sqrt{2}} = 2-2\sqrt{2} \simeq -0.8$, ainsi que $f(1+\sqrt{2}) = \dfrac{1+1+2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 2+2\sqrt{2} \simeq 4.8$. Avant de dresser le tableau de variations, étudions également le signe de $f(x)-x = \dfrac{x^2+1}{x-1}-x = \dfrac{x+1}{x-1}$. Pas de problème pour le signe de ce quotient (il y a en particulier un unique point fixe pour $x = -1$), on va tout regrouper dans un même grand tableau :

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	

On va bien sûr conclure avec une jolie courbe, sur laquelle je vais immédiatement tracer quelques suites comme demandé à la deuxième question :



2. Pour que la suite soit bien définie, il faut (et il suffit) que la valeur de u_n ne devienne jamais égale à 1 (sinon on ne pourrait pas calculer u_{n+1}. On prouve aisément par récurrence la propriété $u_n \neq 1$, en supposant bien entendu que $u_0 \neq 1$. En effet, si $u_n \neq 1$, le tableau de variations de la fonction f assure que $u_{n+1} = f(u_n) \neq 1$: si $u_n < 1$, on a $u_{n+1} \leq 2 - 2\sqrt{2} < 0$, et si $u_n > 1$, alors $u_{n+1} \geq 2 + 2\sqrt{2} > 1$. Dans tous les cas ça marche. Sur la figure précédent, on a tracé un exemple avec $u_0 = 2$ (en vert). Dans ce cas, la suite semble croissante et semble diverger vers $+\infty$. Un deuxième exemple en orange part de $u_0 = -4$, dans ce cas la suite semble croissante et semble converger vers le point fixe 1. Un dernier exemple intéressant lorsque $u_0 = -\dfrac{1}{2}$, mais pour voir un peu mieux ce qui se passe, on va refaire un dessin en zoomant près du point fixe (la suite en rose) :



3. Les limites possibles de la suite sont les points fixes de f, c'est-à-dire qu'il n'y a que $l = -1$ comme limite possible.
4. Commençons par constater que l'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par la fonction f (cela découle des calculs effectués plus haut). Une récurrence triviale assure alors que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ (je ne rédige même pas la récurrence, même si c'est mal). On peut alors affirmer que (u_n) est strictement croissante : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ car $u_n > 1$ (cf l'étude du signe de $f(x) - x$). Si la suite est croissante, il y a deux possibilités : soit elle est majorée et convergente, soit elle diverge vers $+\infty$. Mais si elle convergeait, ce serait nécessairement vers -1, ce qui va être difficile pour une suite dont toutes les valeurs sont strictement supérieures à 1. Il ne reste plus qu'une possibilité : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
5. On peut effectivement distinguer deux ou trois cas :
   - si $u_0 < -1$, l'intervalle $]-\infty, -1[$ est stable par la fonction f, on démontre par récurrence triviale que tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à -1, puis on constate que la suite est croissante (puisque $f(x) - x > 0$ sur cet intervalle), et on en déduit que la suite converge (elle est croissante majorée par -1) et on a donc nécessairement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.
   - si $0 < u_0 < 1$, on aura $f(0) > f(u_0)$, donc $u_1 < f(0) = -1$. À partir du terme d'indice 1, il va donc se passer la même chose que dans le cas précédént : la suite va être strictement croissante à partir du rang 1, et va converger vers -1.
   - un cas très particulier : si $u_0 = 0$, on aura $u_1 = -1$, et la suite devient stationnaire égale à -1. elle converge évidemment toujours vers -1.
   - enfin, un dernier cas si $u_0 \in]-1, 0[$: cet intervalle est lui aussi stable par f, et une nouvelle récurrence triviale permet de prouver que tous les termes de la suite resteront compris entre -1 et 0. Cette fois-ci, la suite sera décroissante, et comme elle est bornée, elle converge nécessairement, toujours vers -1.

Reste à essayer d'appliquer l'IAF. Sur l'intervalle $]-1,0[$, on peut constater que $-1 < x < 0$ implique $-2 < x-1 < -1$, puis $1 < (x-1)^2 < 4$, et enfin $-2 < \dfrac{-2}{(x-1)^2} < -\dfrac{1}{2}$, puis $-1 < f'(x) < \dfrac{1}{2}$. Ce n'est pas terrible, car en valeur absolue, on n'aura pas un majorant strictement inférieur à 1. Pour régler le problème, on peut se placer sur l'intervalle $I_1 = [-1, 1-\sqrt{2}]$, qui est également stable par f puisque $2 - 2\sqrt{2} < 1 - \sqrt{2}$ (ces nombres sont négatifs). Sur cet intervalle, on aura $0 \leq f'(x) < \dfrac{1}{2}$ (puisque f est croissante, et que la majoration précédente reste valable). De plus, si $u_0 \in]-1,0[$, on aura automatiquement $u_1 \in I_1$ et, par récurrence triviale, $u_n \in I_1$. On peut donc appliquer l'IAF entre u_n et -1 pour obtenir l'inégalité $|u_{n+1}+1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n+1|$ (valable donc pour $n \geq 1$). On prouve alors par récurrence que, si $n \geq 1$, on a $|u_n+1| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ (en effet, au rang 1, on a bien $|u_1+1| \leq 1$ puisque $u_1 \in [-1,0]$, et en supposant l'inégalité vraie au rang n, on peut ensuite écrire $|u_{n+1}+1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n+1| \leq \frac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^n}$, exactement ce qu'on veut). La convergence est assez rapide.

Sur l'intervalle $]-\infty,-1]$, c'est plus compliqué car on ne peut pas majorer efficacement la dérivée (elle tend vers -1 en $-\infty$). Il faut donc restreindre l'intervalle, par exemple (de façon complètement arbitraire) à $I_2 = [-5,-1]$. On peut alors écrire $-5 \leq x \leq -1 \Rightarrow -6 \leq x-1 \leq -2 \Rightarrow 4 \leq (x-1)^2 \leq 36 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{-2}{(x-1)^2} \leq -\dfrac{1}{18}$, ce qui donne $\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq \dfrac{17}{18}$. On pourra donc appliquer l'IAF pour écrire une égalité du genre $|u_{n+1}+1| \leq \dfrac{17}{18}|u_n+1|$, mais cette inégalité n'est valable qu'à partir du rang n_0 pour lequel $u_n \geq -5$. On pourra ensuite en déduire par récurrence que $|u_n+1| \leq 4 \times \left(\dfrac{17}{18}\right)^{n-n_0}$, mais si on n'est pas capable de déterminer n_0 ce n'est pas extrêmement utile. Bien sûr, on peut obtenir d'autres majorations (valables à partir d'autres rangs) en restreignant (ou au contraire en élargissant) l'intervalle.

Exercice 2 : dénombrement

1. (a) Il suffit de choisir les trois cases où vont être posés les pions bleus, l'ordre n'a pas d'importance, on va donc utiliser des combinaisons (ici, des répétitions n'auraient pas de sens, cela reviendrait à mettre plusieurs pions sur la même case), soit $\dbinom{16}{3} = 560$ possibilités.

   (b) Il faut choisir la ligne (quatre possibilités), puis choisir les trois emplacements des jetons parmi les quatre disponibles sur la ligne (ou si on préfère choisir la case de la ligne qui n'aura pas de jetons), à nouveau quatre possiblités, donc au total $4 \times 4 = 16$ possibilités.

   (c) Il y a plusieurs façons de faire, concentrons-nous par exemple sur les lignes : on choisit d'abord la ligne qui n'aura pas de jeton (les jetons étant sur trois lignes différentes, il y a exactement une ligne sans jeton), quatre choix possibles. Une fois ce choix effectué, sur la première ligne contenant un jeton, on peut le placer où on veut (quatre choix), sur la deuxième ligne contenant un jeton, on n'a plus que trois possiblités pour éviter la colonne déjà prise, et sur la dernière ligne contenant un jeton, plus que deux possiblités. Au total, $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ possibilités.

   (d) On choisit le coin où va se trouver un jeton, puis il reste à placer les deux jetons restants ailleurs que dans les coins, c'est-à-dire sur les douze cases restantes de la grille, donc il y a $4 \times \dbinom{12}{2} = 264$ possibilités.

   (e) C'est le genre de question horrible où il faut se débrouiller pour s'en sortir « à la main » car on ne trouvera jamais une formule directe. Je vais découper les possiblités en deux catégories. Désignons par le terme « case centrale » les cases qui ne sont pas sur les bords (ou dans les coins) de la grille, il n'y a que quatre cases centrales dans notre grille. Supposons dans un premier temps que l'un de nos pions est placé sur une case centrale (quatre choix possibles pour ce pion donc), par exemple celle située dans la deuxième ligne deuxième colonne (les autres cas sont symétriques). Les seules cases qui ne sont pas voisines de cette case sont les sept cases situés dans la dernière ligne ou la dernière colonne de notre grille, il faut donc y caser les deux autres pions de façon à ce qu'ils ne se touchent pas. Là, on peut vraiment compter les cas : cinq possiblités pour le dernier pion si on met le deuxième en position $(1,4)$ (première ligne, dernière colonne), quatre possibilités s'il est en position $(2,4)$, deux possibilités s'il est en $(3,4)$ (attention, la case $(4,3)$ est adjacente en diagonale à la $(3,4)$, et on ne veut pas recompter le cas où on met le dernier pion en case $(1,4)$ qui a déjà été compté avant), deux possibilités s'il est en position $(4,4)$ et enfin une possibilité s'il est en position $(4,3)$, soit au total $4\times(5+4+2+2+1)=56$ cas avec un pion au centre.

Passons au cas où aucun des trois pions n'est au centre, on doit donc placer trois pions de façon non adjacente sur les bords de la grille. Pas vraiment de meilleur choix que de faire les choses salement à la main : si le premier pion est en $(1,1)$, on a avec 6 choix avec le deuxième pion en $(1,3)$, 6 choix avec le deuxième pion en $(1,4)$, 5 choix avec le deuxième pion en $(2,4)$, 3 choix avec le deuxième pion en $(3,4)$ (interdit de mettre le dernier pion en $(1,3)$ sinon on recompte un cas déjà compté), 3 choix avec le deuxième pion en $(4,4)$, et 2 choix avec le deuxième pion en $(4,3)$ (ensuite on n'a plus de place), soit 25 possibilités. De même, si le premier pion est en $(1,2)$, on a $6+5+3+3+2=19$ possibilités. Si le premier pion est en $(1,3)$: $4+4+3+1+1=13$ possibilités ; si le premier pion est en $(1,4)$: $4+4+3+1+1=13$ possibilités ; si le premier pion est en $(2,4)$: $4+3+1+1=9$ possibilités ; si le premier pion est en $(3,4)$: $1+1=2$ possibilités ; si le premier est en $4,4$ encore deux possibilités, et une dernière avec le premier pion en $(4,3)$ (et les deux autres en $(4,1)$ et en $(2,1)$. Au total, on a donc $25+19+13+13+9+2+2+1=84$ possibilités (les plus malins trouveront certainement une méthode plus intelligente pour retrouver ce total). En additions les cas déjà obtenus plus haut, on a donc $56+84=140$ possibilités, soit exactement un quart des possibilités (oui c'est étrange). Ouf !

(a) Commençons par choisir la case verte, puis les deux cases bleues (même si l'ordre de ces choix n'est bien sûr pas important) : $\binom{16}{1}\times\binom{15}{2}=16\times 105=1\ 680$. On peut bien sûr faire dans l'autre sens : $\binom{16}{2}\times\binom{14}{1}=1\ 680$. Une autre façon de voir les choses : on choisit d'abord les trois cases comme on l'avait fait à la toute première question de l'exercice (indépendamment des couleurs), puis on choisit laquelle des trois est verte : $560\times 3=1\ 680$, tout va bien.

(b) Ici, on a vraiment intérêt à reprendre le calcul de la première partie et à simplement multiplier par trois : $16\times 3=48$.

(c) Toujours le même principe, on fait bêtement $96\times 3=294$.

(d) A-t-on besoin de changer de méthode pout tenir compte des coins ? Non, aucune raison, chaque configuration donnera toujours trois possibilités selon la case parmi les trois qui sera verte : $264\times 3=852$ possibilités.

(e) Bon, je pense que maintenant vous avez compris que cette deuxième partie était une bonne blague et qu'il n'y avait en fait aucun raisonnement à faire : $140\times 3=420$ possibilités.

Exercice 3 : matrices

Par la méthode suggérée, on constate que $B^2=B$, et donc (par récurrence triviale) que $B^k=B$ dès que $k\geq 1$. On peut alors appliquer le binôme de Newton à la décomposition $A=I+B$, les matrices I et B commutant certainement. On écrit ensuite $A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I^{n-k} = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B$ (on a isolé le premier terme qui est le seul pour lequel on ne peut pas remplacer B^k par B, et on a remplacé B^k dans tout le reste de la somme). On en déduit facilement que $A^n = I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) B = I + (2^n - 1)B$ (il ne manque que le terme numéro 0 dans la somme pour reconnaitre la somme des coefficients binomiaux). Si on y tient, on écrit explicitement $A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 & 1-2^n \\ 3-3\times 2^n & 3\times 2^n - 2 & 3-3\times 2^n \\ 1-2^n & 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix}$. Pour les puissances négatives, plutôt que de se fatiguer, on peut tout simplement conjecturer que la formule précédente continue à fonctionner. Par exemple, pour $n=-1$, elle donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Oh, ça marche ! Et c'est pareil pour tous les n négatifs.