Devoir Maison n°5

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 7 mars

Exercice 1 : suites récurrentes

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{u_n - 1}$, et de premier terme $u_0 \neq -1$.

1. En posant $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, étudier le plus complètement possible la fonction f (variations, asymptotes, courbe) ainsi que le signe de $f(x) - x$.
2. Justifier rigoureusement que la suite (u_n) est bien définie, et faire une étude graphique de la suite (on pourra tracer plusieurs exemples sur la courbe de f selon la valeur de u_0).
3. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
4. Étudier la convergence de la suite dans le cas où $u_0 > 1$.
5. Procéder à la même étude quand $u_0 < 1$ (il y a aura peut-être plusieurs cas à distinguer). Dans les cas où la suite converge, on essaiera d'écrire l'IAF sur un intervalle intelligemment choisi pour majorer l'écart entre u_n et la limite de la suite.

Exercice 2 : dénombrement

On dispose d'une grille de 16 cases (quatre lignes, quatre colonnes) dans laquelle on veut disposer (sur trois cases distinctes) trois pions.

1. Les trois pions sont bleus (et donc indistinguables). De combien de façons peut-on les disposer :
   (a) si on n'impose aucune condition (autre que les trois cases distinctes) ?
   (b) si on veut que les trois pions soient sur une même ligne ?
   (c) si on ne veut jamais avoir deux pions sur une même ligne ou sur une même colonne ?
   (d) si on veut exactement un pion dans un coin de la grille ?
   (e) si on ne veut pas avoir deux pions sur des cases adjacentes (deux cases qui se touchent en diagonale sont considérées comme adjacentes) ?
2. Recommencer l'exercice en supposant qu'on a deux pions bleus (indistinguables) et un vert.

Exercice 3 : matrices

Calculer toutes les puissances (y compris les puissances négatives) de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
La méthode n'est pas imposée mais si on n'est pas inspiré, on pourra toujours constater que la matrice $B = A - I$ a un carré intéressant.