Devoir Maison n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 janvier 2017

Problème 1

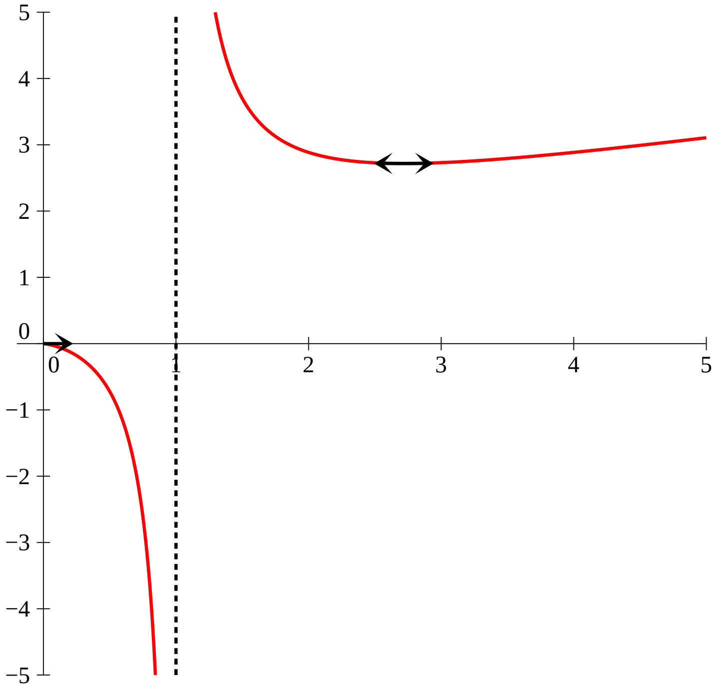
1. (a) Une fois ajoutée la valeur en 0, la seule valeur interdite reste $x = 1$ (qui annule le dénominateur), donc $\mathcal{D}_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

   (b) La limite en 0 ne pose aucun problème (pas de forme indéterminée) : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0 = f(0)$, donc la fonction est continue en 0.

   (c) La fonction f est certainement dérivable sur son domaine de définition privé de 0, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$. Notons d'ailleurs que f est en fait également dérivable en 0 car son taux d'accroissement en 0, donné par la formule $\tau_0(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{1}{\ln(h)}$ admet une limite finie (et nulle) quand h tend vers 0. On aura donc une tangente horizontale à la courbe représentative de f en 0. Le signe de f' ne pose guère de problème, elle s'annule pour $x = e$, et elle est positive sur l'intervalle $[e, +\infty[$. On calcule sans difficulté $f(e) = e$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (par croissance comparée pour cette dernière limite). On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0		1			e		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) Voici une allure :



2. (a) C'est une récurrence triviale : c'est vrai par hypothèse au rang 0, et si on suppose $v_n \geq e$, alors $v_{n+1} = f(v_n) \geq e$ puisque f effectue une bijection de $[e, +\infty[$ vers lui-même.

   (b) Calculons donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)} - v_n = \dfrac{v_n(1-\ln(v_n))}{\ln(v_n)}$. Comme $v_n \geq e$, on a $1 - \ln(v_n) \leq 0$, et $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite est donc décroissante. Étant de plus minorée, elle converge.

   (c) Notons l la limite de la suite. Comme $v_{n+1} = f(v_n)$ (et que f est une fonction continue), on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = f(l)$, mais par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = l$, donc on doit avoir $f(l) = l$, soit $\dfrac{l}{\ln(l)} = l$, ou encore $l = l\ln(l)$. Cette équation n'est vérifiée que par $l = 0$ (valeur évidemment exclue pour la limite puisque la suite est minorée par e), et par $l = e$. La seule valeur possible pour la limite est donc e. Puisque la suite est convergente, on peut donc affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e$.

   (d) Pour simplifier le calcul, posons $X = \ln(x)$, et écrivons $g(X) = f'(x) = \dfrac{X-1}{X^2} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X^2}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $g'(X) = -\dfrac{1}{X^2} + \dfrac{2}{X^3} = \dfrac{2-X}{X^3}$. La fonction g est donc croissante sur $]0;2]$ et décroissante ensuite, et admet pour maximum sur $\mathbb{R}^{+*}$ la valeur $g(2) = \dfrac{1}{4}$. On en déduit donc que, $\forall X \in \mathbb{R}^*$, $g(X) \leq \dfrac{1}{4}$, et donc que $f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$ lorsque $\ln(x) > 0$, donc lorsque $x > 1$ (et non $x \geq 0$ comme indiqué par erreur dans l'énoncé. Ceci dit, la dérivée étant négative sur $[0, 1[$, l'inégalité reste trivialement vraie).

   (e) On souhaite donc avoir $|v_n - e| \leq 10^{-12}$, ce qui est vrai dès que $\dfrac{1}{4^n} \leq 10^{-12}$, soit $4^n \geq 10^{12}$. Cette inégalité est vérifiée lorsque $n\ln(4) \geq 12\ln(10)$, soit $n \geq \dfrac{6\ln(10)}{\ln(2)}$. On peut donc prendre $n = \mathrm{Ent}\left(\dfrac{6\ln(10)}{\ln(2)}\right) + 1 = 20$ (oui, j'ai utilisé la calculatrice pour obtenir cette valeur !). Alternativement, on sait que $2^{10} = 1\ 024 > 10^3$, donc $4^{10} = (2^{10})^2 > 10^6$, et $4^{20} > 10^{12}$.

3. (a) La fonction g est dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et $g'(x) = \dfrac{2x^2\ln(x) + (1-x^2)(\ln(x)+1)}{x^2\ln^2(x)} =$

$\dfrac{(x^2+1)\ln(x)+1-x^2}{x^2\ln^2(x)} = \dfrac{x^2+1}{x^2\ln^2(x)} \times \left(\ln(x)+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, qui est bien de la forme souhaitée en posant $h(x)=\ln(x)+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. La dérivée g' étant du même signe que h (le quotient en facteur est manifestement positif), on va étudier cette dernière fonction pour déterminer son signe : h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $h'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(1+x^2)^2-4x^2}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{(1+x^2+2x)(1+x^2-2x)}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{(1+x)^2(1-x)^2}{x(+x^2)^2}$. Cette dérivée est toujours positive (là où elle est définie), la fonction h est donc strictement croissante sur $]0+\infty[$. On constate aisément que $h(1)=0$, donc h (et g' par la même occasion) est négative sur $]0,1[$ et positive sur $]1,+\infty[$. On en déduit que g est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$.

(b) On peut écrire $g(x) = \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{x-1}{\ln(x)}$. Or, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln(x)} = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{X}{\ln(X+1)} = 1$ en posant $X=x-1$ pour se ramener à une limite bien connue. Comme par ailleurs $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=2$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$.

(c) Caculons donc $f(x)-g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{x^2-1}{x\ln(x)} = \dfrac{x^2-(x^2-1)}{x\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$. La courbe de représentative de g est donc au-dessus de celle de f sur $]0,1[$ (la différence calculée est alors négative) et c'est la courbe de f qui est au-dessus sur $]1,+\infty[$. Le calcul d'aire demandé revient exactement à calculer $I = \displaystyle\int_2^e f(x)-g(x)\ dx = \int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}\ dx = [\ln(\ln(x))]_2^e = -\ln(\ln(2))$ (qui est bien un nombre positif).

4. (a) On a donc $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ (la fonction y ne peut pas s'annuler), d'où $z'(x) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)}$. En remplaçant dans l'équation de départ, on trouve alors $\dfrac{x^2y'(x)}{y^2(x)} + \dfrac{x}{y(x)} = \dfrac{1}{y^2(x)}$. En multipliant tout par $y^2(x)$ (qui ne s'annule pas, on obtient donc une équation équivalente), on trouve $x^2y'(x)+xy(x)=1$, qui est bien une équation linéaire.

(b) Puisqu'on est sur $]1,+\infty[$, on peut normaliser sans problème : $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2}$. L'équation homogène associée $y'+\dfrac{1}{x}y=0$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y_p : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \dfrac{K}{x}$, avec $K\in\mathbb{R}$. Pour déterminer une solution particulière, on va appliquer la méthode de variation de la constante en posant $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, soit $y_p'(x) = \dfrac{xK'(x)-K(x)}{x^2}$. La fonction y_p est donc solution si $\dfrac{K'(x)}{x} - \dfrac{K(x)}{x^2} + \dfrac{K(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, soit $K'(x) = \dfrac{1}{x}$. On peut choisir $K(x)=\ln(x)$, soit $y_p(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \dfrac{\ln(x)+K}{x}$, avec $K\in\mathbb{R}$. Pour que ces fonctions ne s'annulent pas sur $]1,+\infty[$, il faut que l'équation $\ln(x)=-K$ n'ait pas de solutions supérieure à 1, ce qui sera le cas si $K\geq 0$.

(c) Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme $z : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+K}$, avec $K\geq 0$. Si $K=0$, on reconnait tout simplement la fonction f. Si $K>0$, on peut l'écrire sous la forme $\ln(\alpha)$, avec $\alpha>1$, pour obtenir $z(x) = \dfrac{x}{\ln(\alpha x)}$. Autrement dit, $z(x) = \dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{\alpha x}{\ln(\alpha x)} = \dfrac{1}{\alpha}f(\alpha x)$. La relation $f(\alpha x) = \alpha z(x)$ revient exactement à dire que la courbe $\mathcal{C}_f$ est image de la courbe représentative de la fonction z par une homothétie de centre O et de rapport

α (en effet, si le point (x, y) est situé sur $\mathcal{C}_z$, donc si $y = z(x)$, alors $f(\alpha x) = \alpha y$ et le point de coordonnées $(\alpha x, \alpha y)$, qui est l'image de (x, y) par cette homothétie, est situé sur $\mathcal{C}_f$). Inversement, les courbes intégrales de (E) sont donc obtenues à partir de $\mathcal{C}_f$ en lui appliquant toutes les homothéties de centre O et de rapport $\lambda = \dfrac{1}{\alpha} \in]0,1[$.

5. (a) La fonction H ne peut être définie que pour des valeurs strictement positives de x (sinon on est en train d'intégrer f sur un intervalle sur lequel elle n'est pas définie !). Mais si $x \geq 1$, on va avoir également un problème puisque l'intervalle d'intégration $[0, x]$ inclura la valeur 1 en laquelle f n'est pas définie. On en déduit que $\mathcal{D}_H =]0,1[$.

   (b) En notant F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,1[$ (la fonction f étant continue sur cet intervalle, elle y admet certainement des primitives), on a $H(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$, ce qui représente le taux d'accroissement de la fonction F en 0. Par définition de la dérivée, ce taux d'accroissement a une limite en 0 qui est égale à $F'(0) = f(0) = 0$.

   (c) On sait que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ (limite classique dont on s'est déjà servi plus haut, en posant $X = x - 1$ en se ramenant à une limite bien connue en 0). La définition de la limite, appliquée pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, assure alors l'existence d'un réel $\eta > 0$ pour lequel $x \in [1 - \eta, 1 + \eta] \backslash \{1\} \Rightarrow \left| \dfrac{\ln(x)}{x-1} - 1 \right| \leq \dfrac{1}{2}$. En posant $a = 1 - \eta$, on a en particulier, si $x \in [a, 1[$, $\dfrac{1}{2} \leq \left| \dfrac{\ln(x)}{x-1} \right| \leq \dfrac{3}{2}$, soit $\dfrac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \dfrac{1}{2}(x-1)$ (sur l'intervalle considéré, $x - 1 < 0$, il faut donc renverser le sens des inégalités). Par croissance de l'intégrale, on peut en déduire que, si $a \leq x < 1$ $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \leq \frac{2}{3} \frac{t}{t-1}\ dt = \frac{2}{3} \int_a^x \frac{t-1+1}{t-1}\ dt = \frac{2}{3}[t + \ln(1-t)]_a^x = x + \ln(1-x) - a - \ln(1-a)$. Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 1^-} \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt = -\infty$ (l'inégalité de gauche de l'encadrement ne sert en fait à rien). Si on lui ajoute la constante $\displaystyle\int_0^a f(t)\ dt$, la limite de va pas changer : $\lim\limits_{x \to 1^-} \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = -\infty$. La division par x, qui va tendre vers 1, ne changera rien non plus : $\lim\limits_{x \to 1^-} H(x) = -\infty$.

Problème 2

1. (a) Posons donc $a = x + iy$, la condition $|a| = \operatorname{Re}(a)$, soit $\sqrt{x^2 + y^2} = x$ ne peut être vérifiée que si $x \in \mathbb{R}^+$ (puisque le membre de gauche de l'égalité est positif). Dans ce cas, puisque tout est positif, on peut tout élever au carré pour obtenir l'égalité équivalente $x^2 + y^2 = x^2$, qui donne trivialement $y = 0$. On doit donc avoir $\operatorname{Im}(a) = 0$ et $a = x \in \mathbb{R}^+$.

   (b) Les notations du problèmes sont particulièrement pénibles, on va donc essayer d'éviter d'écrire les deux nombres complexes sous forme algébrique. À la place, calculons $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$. On peut en déduire $(|z| + |w|)^2 - |z+w|^2 = |z|^2 + 2|z| \times |w| + |w|^2 - |z|^2 - |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) = 2|z| \times |\overline{w}| - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) = 2(|z\overline{w}| - \operatorname{Re}(z\overline{w}))$.

   (c) La partie réelle d'un nombre complexe est toujours inférieure à son module (en effet, $x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$), donc le membre de droite de l'égalité prouvée à la question précédente est positif. Autrement dit, $(|z| + |w|)^2 \geq |z + w|^2$, et comme tout est positif, c'est équivalent à l'inégalité triangulaire $|z| + |w| \geq |z + w|$. Il n'y aura égalité que si $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}|$, soit en utilisant la question a si $z\overline{w} \in \mathbb{R}^+$. Si $w \neq 0$ (cas où l'inégalité est trivialement une égalité), on peut alors écrire $z = \dfrac{\lambda}{\overline{w}} = \dfrac{\lambda}{|w|^2} \times w$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Autrement dit, z est un multiple réel positif de w, ce qui revient à dire que les points d'affixes z et w

sont alignés dans le plan complexe sur une même demi-droite d'origine O (la réciproque est évidente).

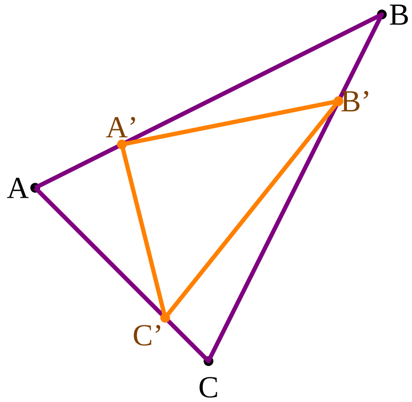
2. (a) Il suffit de résoudre l'équation : $qz - qa = pb - pz$, soit $z(p+q) = pb + qa$, ou encore $z = \dfrac{pb+aq}{p+q}$ (les réels p et q étant supposés strictement positifs, aucun risque que $p+q$ s'annule). La solution est manifestement unique. Géométriquement, le point est toujours aligné avec A et B (puisque $\dfrac{z-a}{b-z}$ est un réel, en notant P le point d'affixe z, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont colinéaires). La positivité de $\dfrac{p}{q}$ assure même que le point P appartient au segment $[AB]$. Techniquement, il s'agit du barycentre des deux points A et B affectés des poids p (sur le point B) et q (sur le point A).

   (b) Dans ce cas, on a juste $z = \dfrac{a+b}{2}$, et le point correspondant est donc le milieu du segment $[AB]$.

   (c) C'est trivial, puisque la formule pour z est inchangée dans ce cas (le numérateur et le dénominateur sont tous les deux multipliés par α).

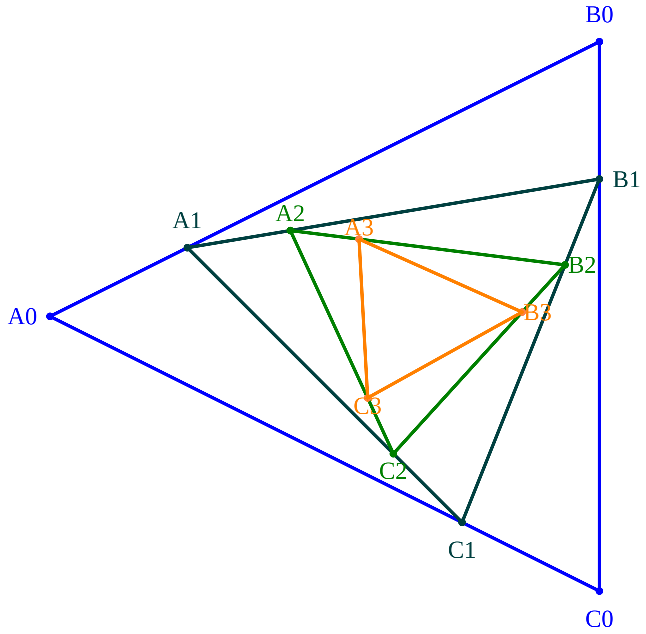
   (d) En notant c l'affixe de C, le point X a pour affixe $x = \dfrac{pb+aq}{p+q}$ et le point Y a pour affixe $y = \dfrac{pc+aq}{p+q}$. On en déduit que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{XY}$ est $y - x = \dfrac{pc+aq-pb-aq}{p+q} = \dfrac{p}{p+q}(c-b)$, ce qui est proportionnel (avec un coefficient réel !) à $c-b$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires, et les droites (XY) et (BC) sont parallèles (remarquez qu'on vient brillamment de redémontrer le théorème de Thalès).

3. (a) Le $(1:3)$ point de A vers B est par définition situé au quart du segment $[AB]$ en partant du point A (il est trois fois plus près de A que de B. On obtient la figure suivante :



   (b) En reprenant les formules obtenues précédemment, les points A', B' et C' ont pour affixes respectives $\dfrac{pb+aq}{p+q}$, $\dfrac{pc+bq}{p+q}$ et $\dfrac{pa+cq}{p+q}$. Le centre de gravité du triangle a donc pour affixe $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{pb+aq}{p+q} + \dfrac{pc+bq}{p+q} + \dfrac{pa+cq}{p+q}\right) = \dfrac{p(a+b+c)+q(a+b+c)}{3(p+q)} = \dfrac{a+b+c}{3}$. Le centre de gravité de $A'B'C'$ est donc le même que celui de ABC.

4. (a) Voici une figure possible :



(b) Comme on l'a déjà quasiment vu plus haut, les $(p:q)$ points du sous-triangle de $A_nB_nC_n$ ont des coordonnées égales à $a_{n+1} = \dfrac{qa_n + pb_n}{p+q}$; $b_{n+1} = \frac{qb_n+pc_n}{p+q}$ et $c_{n+1} = \dfrac{qc_n + pa_n}{p+q}$. Ce sont exactement les formules données par la relation matricielle de l'énoncé.

(c) Calculons donc $\alpha_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \dfrac{qa_n + pb_n + qb_n + pc_n + qc_n + pa_n}{p+q} = a_n + b_n + c_n = \alpha_n$ (c'est le même calcul que celui déjà effectué pour le centre de gravité un peu plus haut). La suite (α_n) est donc mieux que géométrique : elle est constante ! Elle converge donc évidemment vers $\alpha_0 = a+b+c$. Calculons maintenant $\beta_{n+1} = a_{n+1}+jb_{n+1}+j^2c_{n+1} = \dfrac{qa_n + pb_n + jqb_n + jpc_n + j^2qc_n + j^2pa_n}{p+q} = \dfrac{(q+j^2p)(a_n + jb_n + j^2c_n)}{p+q} = \dfrac{q+j^2p}{p+q}\beta_n$ en utilisant la relation $j^3 = 1$ (et $j^4 = j$). La suite (β_n) est donc géométrique de raison (complexe) $r = \dfrac{q+j^2p}{p+q}$. Or, à l'aide de l'inégalité triangulaire, $|r| = \dfrac{|q+j^2p|}{p+q} \leq \dfrac{|q|+|j^2||p|}{q+p} \leq \dfrac{q+p}{p+q} = 1$ (le nombre j ayant un module 1). Cette inégalité est en fait stricte car les nombres j^2p et q ne sont certainement pas proportionnels (q est réel et j^2p pas du tout), donc $|r| < 1$. Cela suffit à affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$. De même, on calcule facilement $\gamma_{n+1} = \dfrac{q+jp}{p+q}\gamma_n$, et la limite de cette suite est également nulle.

(d) Le produit à droite par Q échange les deux dernières colonnes de la matrice (si on tient à le prouver rigoureusement, on prend une matrice aux coefficients quelconques et on écrit le calcul explicite).

(e) On calcule donc $V^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1+j+j^2 & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 1+j+j^2 & 3 \\ 1+j+j^2 & 3 & 1+j+j^2 \end{pmatrix}$. Or, $1+j+j^2 = 0$, et on trouve en fait $V^2 = 3Q$. Or, la matrice Q est elle-même inversible, et sa propre inverse (calcul vraiment idiot). La matrice V est donc elle-même inversible car son carré est inversible, et on peut écrire que $V^{-2} = \dfrac{1}{3}Q^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$, soit $V^{-1}V^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$. En multipliant cette égalité à gauche par V, on trouve alors $V^{-1} = \frac{1}{3}VQ = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$

(f) On constate en effet l'égalité matricielle de l'énoncé, qui implique que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Autrement dit, on a les relations $a_n = \dfrac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n}{3}$, $b_n = \dfrac{\alpha_n + j^2\beta_n + j\gamma_n}{3}$ et $c_n = \dfrac{\alpha_n + j\beta_n + j^2\gamma_n}{3}$. Les limites des trois suites découlent alors facilement de celles calculées plus haut : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{a+b+c}{3}$. Autrement dit, les sommets des sous-triangles convergent tous vers le centre de gravité du triangle initial.