Devoir Maison n°4

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 24 janvier 2017

Ce sujet est en grande partie extrait de vieux sujets de concours, et vous servira à réviser les principaux chapitres abordés depuis le début de l'année, en vue notamment du DS commun de fin janvier.

Problème 1

1. On définit une fonction f de la façon suivante : $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.
   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f.
   (b) La fonction f est-elle continue en 0 (on rappelle que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$) ?
   (c) Calculer la dérivée f' de la fonction f et dresser son tableau de variations complet (on fera aussi apparaitre la valeur de $f(e)$).
   (d) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de f.
2. On définit désormais une suite (v_n) en posant $v_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est minorée par e.
   (b) Déterminer la monotonie de (v_n) et en déduire qu'elle converge.
   (c) Justifier rigoureusement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e$.
   (d) Montrer que, $\forall x \geq 0$, on a $f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.
   (e) On admet que le résultat précédent permet de prouver que $|v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$. En déduire un entier n_0 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.
3. On pose désormais $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x \ln(x)}$.
   (a) Déterminer une fonction h telle que $g'(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$, et étudier les variations de la fonction g.
   (b) Déterminer la limite de la fonction g quand x tend vers 1.
   (c) Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g, puis calculer l'aire du domaine délimité dans le plan par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 2$ et $x = e$.
4. On considère l'équation différentielle $(E) : -x^2 z'(x) + x z(x) = z^2(x)$. On cherche les solutions de (E) définies et ne s'annulant pas sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
   (a) On pose $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$. Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (F) sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation (F) et déterminer ses qui ne s'annulent pas.
   (c) En déduire les solutions de l'équation (E). Expliquer comment obtenir facilement (par une méthode géométrique) les courbes intégrales de cette équation à l'aide de la courbe $\mathcal{C}_f$ tracée à la question 1.
5. On pose enfin $H(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction H.

(b) Déterminer la limite de H en 0 (pas vraiment de calcul nécessaire).

(c) Montrer qu'il existe un réel $a \in]0,1[$ tel que, $\forall x \in [a,1[$, $\frac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$. En déduire la valeur de $\underset{x\to 1^-}{H}(x)$.

Problème 2

Dans tout l'exercice, on utilisera la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et on rappelle que $\overline{j} = j^2$.

1. Une inégalité classique (Note de Roupoil : c'est même du cours !).
   (a) Soit $a \in \mathbb{C}$, montrer que $\text{Re}(a) = |a| \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.
   (b) Soient z et w deux nombres complexes, montrer que $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 = 2(|z\overline{w}| - \text{Re}(z\overline{w}))$.
   (c) En déduire l'inégalité triangulaire $|z+w| \leq |z|+|w|$, et donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.
2. La notion de $(p:q)$ point.
   (a) Soient A et B deux points distincts du plan complexe, et p, q deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe un unique nombre complexe z tel que $\frac{z-a}{b-z} = \frac{p}{q}$. On appelle $(p:q)$ point de A vers B l'image de ce nombre dans le plan complexe. Donner la valeur de z et une interprétation géométrique du point correspondant.
   (b) À quoi correspond le $(1:1)$ point de A vers B ?
   (c) Montrer que, si $\alpha > 0$, le $(\alpha p : \alpha q)$ point de A vers B est le même que le $(p:q)$ point de A vers B.
   (d) Soient A, B et C trois points distincts deux à deux, on note X le $(p:q)$ point de A vers B et Y le $(p:q)$ point de A vers C. Montrer que la droite (XY) est parallèle à la droite (BC).
3. La notion de $(p:q)$ sous-triangle.
   (a) On appelle $(p:q)$ sous-triangle du triangle (ABC) le triangle $(A'B'C')$ constitué du point A', $(p:q)$ point de A vers B ; B', $(p:q)$ point de B vers C ; et C', $(p:q)$ point de C vers A. Faire un dessin pour illustrer cette notion dans le cas où $p=1$ et $q=3$.
   (b) Donner l'affixe du centre de gravité du triangle $(A'B'C')$, et comparer à celle du centre de gravité de (ABC).
4. Étude d'une suite de triangles.
   On définit une suite de triangles $(A_nB_nC_n)$ de la façon suivante : le triangle $(A_0B_0C_0)$ est fixé (et les réels p et q également), et pour tout entier n, le triangle $(A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1})$ est le $(p:q)$ sous-triangle du triangle $(A_nB_nC_n)$. On note a_n, b_n et c_n les affixes respectives des points A_n, B_n et C_n.
   (a) Faire un dessin en reprenant les valeurs $p=1$ et $q=3$ et en dessinant les quatre premiers triangles de la suite (on prendra ce qu'on veut comme premier triangle).
   (b) Montrer la relation $\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$.
   (c) On pose $\alpha_n = a_n + b_n + c_n$, $\beta_n = a_n + jb_n + j^2c_n$ et $\gamma_n = a_n + j^2b_n + jc_n$, montrer que ces trois suites sont géométriques (on précisera les raisons, qui ne sont pas toutes les mêmes), et étudier leur convergence (on précisera les limites le cas échéant).
   (d) On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que se passe-t-il si on multiplie une matrice quelconque à droite par la matrice Q ?
   (e) Calculer V^2, montrer que V est une matrice inversible, et exprimer V^{-1} en fonction de VQ.
   (f) En constantant que $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, montrer que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont convergentes, et préciser leur limites.