Devoir Maison n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 novembre 2016

Problème 1

1. Posons donc $y(x) = g(\ln(x))$, et calculons $y'(x) = \dfrac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}g'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}g''(\ln(x))$. On peut remplacer dans l'équation initiale : $-g'(\ln(x)) + g''(\ln(x)) - g'(\ln(x)) + g(\ln(x)) = x + \sin(\ln(x))$. On pose maintenant $t = \ln(x)$ pour obtenir $g''(t) - 2g'(t) + g(t) = e^t + \sin(t)$. Cette équation du second ordre à coefficients constants a pour équation caractéristiques $x^2 - 2x + 1 = 0$, qui admet pour racine double $x = 1$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme $g_h(t) = (A+Bt)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On va chercher une solution particulière à l'équation en appliquant le principe de superposition. Cherchons d'abord une solution g_{p_1} de l'équation $g'' - 2g' + g = e^t$ sous la forme $g_{p_1}(t) = (at^2 + bt + c)e^t$ (on est obligés d'augmenter le degré de deux puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique). On calcule $g'_{p_1}(t) = (2at + b)e^t + (at^2 + bt + c)e^t = (at^2 + (2a + b)t + b + c)e^t$, puis de même $g''_{p_1}(t) = (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c)e^t$. En factorisant le tout par e^t, la fonction g_{p_1} est solution de l'équation donnée plus haut si $at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c - 2at^2 - (4a + 2b)t - 2b - 2c + at^2 + bt + c = 1$, soit $2a = 1$ (les plus savant auraient anticipé la disparition des termes de degré 0 et 1 au vu des solutions obtenues pour l'équation homogène, et auraient simplement posé $g_{p_1}(t) = at^2e^t$). On peut donc prendre $g_{p_1}(t) = \dfrac{1}{2}t^2e^t$. Cherchons maintenant une solution g_{p_2} à l'équation $g'' - 2g' + g = \sin(t)$ sous la forme $g_{p_2}(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. On calcule cette fois $g'_{p_2}(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$ puis $g''_{p_2}(t) = -a\cos(t) - b\sin(t)$, et la fonction est donc solution si $-a\cos(t) - b\sin(t) + 2a\sin(t) - 2b\cos(t) + a\cos(t) + b\sin(t) = \sin(t)$, soit $2a\sin(t) - 2b\cos(t) = \sin(t)$. Cette condition est manifestement vérifiée en posant $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$, soit $g_{p_2}(t) = \dfrac{1}{2}\cos(t)$. La fonction $g_p : t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2e^t + \dfrac{1}{2}\cos(t)$ est donc solution particulière de l'équation complète. On tient nos solutions de l'équation : $g(t) = (A + Bt)e^t + \dfrac{1}{2}t^2e^t + \dfrac{1}{2}\cos(t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à remonter le changement de variable (les deux équations sont équivalentes sur l'intervalle de résolution imposé). On trouve alors $y(x) = Ax + Bx\ln(x) + \dfrac{1}{2}x\ln^2(x) + \dfrac{1}{2}\cos(\ln(x))$, avec toujours $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. Posons donc $z = xy' - y$, soit $z' = y' + xy'' - y' = xy''$. Autrement dit, $xz' = x^2y''$, et l'équivalence entre les deux équations devient essentiellement triviale. Résovons donc l'équation $xz' - z = x + \sin(\ln(x))$, ou plutôt sa version normalisée $z' - \dfrac{1}{x}z = 1 + \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Les solutions homogènes de cette équation du premier ordre sont de la forme $z_h(x) = Ke^{\ln(x)} = Kx$, avec $K \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière en appliquant la variation de la constante, donc en posant $z_p(x) = xK(x)$. On a alors $z'_p(x) = K(x) + xK'(x)$, et $z'_p(x) - \dfrac{1}{x}z_p(x) = 1 + \dfrac{\sin(\ln(x))}{x} \Leftrightarrow xK'(x) = 1 + \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$, soit $K'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\sin(\ln(x))}{x^2}$ (comme toujours, les termes en $K(x)$ se simplifient). On n'aura évidemment pas de problème à trouver une primitive du terme en $\dfrac{1}{x}$, mais le second pose plus de problèmes. Suivant bê-

tement les indications de l'énoncé, calculons $K_1(x) = \int \frac{\sin(\ln(x))}{x^2}\,dx$ par IPP, en posant $u'(x) = \frac{1}{x^2}$, et donc $u(x) = -\frac{1}{x}$, et $v(x) = \sin(\ln(x))$, donc $v'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$. On trouve alors $K_1(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x} + \int \frac{\cos(\ln(x))}{x^2}\,dx$. On refait une IPP dans le même sens, en posant toujours $u'(x) = \frac{1}{x}^2$, donc $u'(x) = -\frac{1}{x}$, et $v(x) = \cos(\ln(x))$, donc $v'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$. On trouve maintenant $K_1(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x} - \frac{\cos(\ln(x))}{x} - K_1(x)$. Autrement dit, on peut prendre $K_1(x) = -\frac{\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))}{2x}$. On en déduit $K(x) = \ln(x) - \frac{\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))}{2x}$, et donc $z_p(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}\sin(\ln(x)) - \frac{1}{2}\cos(\ln(x))$. Les solutions de l'équation complète (en z), sont donc les fonctions de la forme $z(x) = Kx + x\ln(x) - \frac{1}{2}\sin(\ln(x)) - \frac{1}{2}\cos(\ln(x))$.
On est loin d'en avoir terminé : puisqu'on a posé $z = xy' - y$, pour retrouver y, il faut maintenant résoudre l'équation différentielle $xy' - y = Kx + x\ln(x) - \frac{1}{2}\sin(\ln(x)) - \frac{1}{2}\cos(\ln(x))$, ou encore en normalisant $y' - \frac{1}{x}y = K + \ln(x) - \frac{\sin(\ln(x))}{2x} - \frac{\cos(\ln(x))}{2x}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h(x) = Lx$, avec $L \in \mathbb{R}$. Cherchons donc une solution particulière de la forme $y_p(x) = xL(x)$, ce qui donne $y_p'(x) = L(x) + xL'(x)$ (le calcul est le même que pour la première équation résolue plus haut), puis $L'(x) = \frac{K}{x} + \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\sin(\ln(x))}{2x^2} - \frac{\cos(\ln(x))}{2x^2}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{\cos(\ln(x))}{x^2}$ s'obtient exactement par la même méthode que ci-dessus (double IPP), on trouve $\frac{\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{2x}$. On peut donc prendre $K\ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x) + \frac{\sin(\ln(x))}{4x} + \frac{\cos(\ln(x))}{4x} - \frac{\sin(\ln(x))}{4x} + \frac{\sin(\ln(x))}{4x} = K\ln(x) + \frac{1}{2}\ln^2(x) + \frac{\cos(\ln(x))}{2x}$. Cela revient à $y_p(x) = Kx\ln(x) + \frac{1}{2}x\ln^2(x) + \frac{1}{2}\cos(\ln(x))$, et les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y(x) = Lx + Kx\ln(x) + \frac{1}{2}x\ln^2(x) + \frac{1}{2}\cos(\ln(x))$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$. Oh, tiens, c'est exactement la même chose qu'avec la première méthode, c'est vraiment très surprenant !

Problème 2

1. On sait que les solutions en question sont de la forme $Ce^x + De^{-x}$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. On peut aussi les écrire $(C + D) \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} + (C - D) \times \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Quitte à poser $A = C + D$ et $B = C - D$, ces solutions sont donc de la forme $A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x)$. La réciproque se fait de la même façon.
2. La fonction z est certainement elle-même deux fois dérivable, et $z'(x) = -e^{-x}y + e^{-x}y' = e^{-x}(y'-y)$, puis $z''(x) = -e^{-x}(y'-y) + e^{-x}(y''-y') = e^{-x}(y''-2y'+y) = e^{-x}(y''-y) - 2e^{-x}(y'-y)$ (c'est une façon peu naturelle d'écrire les choses mais c'est vrai ! En partant de l'hypothèse que $y'' - y = f(x)$, on a donc $z''(x) = e^{-x}f(x) - 2z'(x)$. La fonction z' est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre $Z' + 2Z = e^{-x}f(x)$ (en posant simplement $Z = z'$). La réciproque est évidente, les deux équations étant clairement équivalentes. Le second membre de notre équation étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, l'équation admet certainement des solutions, et (E) en admet donc aussi. De plus, il existe une unique solution à notre équation vérifiant $Z(0) = z'(0) = 0$ (problème de Cauchy du premier ordre), condition équivalente à l'égalité $y'(0) = y(0)$. Cette unique fonction Z admet elle-même une unique primitive s'annulant en 0, ce qui cette fois-ci est une condition équivalente à $y(0) = 0$. La fonction g définie par

$g(x) = e^x z(x)$ est alors une solution vérifiant $g(0) = g'(0) = 0$, et c'est la seule puisque la construction assure l'unicité de la fonction z correspondante.

3. Posons donc dans un premier temps $f(x) = x^3 + x$, et tentons de résoudre l'équation $y'' - y = x^2 + x$ (passer par l'équation équivalente obtenue à la question précédente ne ferait que compliquer énormément le calcul alors qu'on sait très bien résoudre l'équation (E) dans ce cas). On connait déjà les solutions de l'équation homogène (question 1), reste à trouver une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On dérive deux fois pour trouver $y_p''(x) = 6ax + 2b$, donc y_p est solution si $-ax^3 - bx^2 + (6a - c)x + 2b - d = x^3 + x$. Par identification des coefficients, on trouve donc $a = -1$; $b = 0$; $6a - c = 1$ donc $c = -7$, et $d = 0$, soit $y_p(x) = -x^3 - 7x$. Les solutions de l'équation complète sont alors de la forme $y(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x) - x^3 - 7x$. Les deux conditions imposées par notre problème de Cauchy sont $y(0) = 0$, soit $A = 0$; et $y'(0) = 0$, avec $y'(x) = A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x) - 3x^2 - 7$, donc $B = 7$. Autrement dit, dans ce cas, $g(x) = 7\operatorname{sh}(x) - 3x^2 - 7x$.

   Dans le cas où $f(x) = \cos^2(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2x)}{2}$, on peut procéder par superposition pour déterminer une solution particulière. La fonction constante $y_{p_1}(x) = -\dfrac{1}{2}$ est clairement solution de l'équation $y'' - y = \dfrac{1}{2}$. Cherchons ensuite une solution à l'équation $y'' - y = \dfrac{\cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Re}(e^{i2x})$ en passant par une solution complexe y_c de l'équation $y'' - y = \dfrac{1}{2}e^{i2x}$. On peut imposer $y_c(x) = Ke^{i2x}$, puis calculer $y_c''(x) = -4Ke^{i2x}$, ce qui donne la condition $-4K - K = \dfrac{1}{2}$, soit $K = -\dfrac{1}{10}$. On a donc $y_c(x) = -\dfrac{1}{10}e^{i2x}$ puis, en reprenant la partie réelle, $y_{p_2}(x) = -\dfrac{1}{10}\cos(2x)$. Une solution particulière de notre équation complète est donc $y : x \mapsto -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10}\cos(2x)$, et toutes les solutions sont données par les formules $y(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x) - \dfrac{1}{10}\cos(2x) - \dfrac{1}{2}$. Cette fois, la condition $y(0) = 0$ impose $A - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{2} = 0$, soit $A = \dfrac{3}{5}$. Ensuite, $y'(x) = A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x) + \dfrac{1}{5}\sin(2x)$, donc $y'(0) = B$, et on doit avoir $B = 0$. La deuxième fonction g recherchée est donc définie par $g(x) = \dfrac{3}{5}\operatorname{sh}(x) - \dfrac{1}{10}\cos(2x) - \dfrac{1}{2}$.

4. Calculons donc $h'(x) = g'(x) + g'(-x)$, puis $h''(x) = g''(x) - g''(-x)$. Bien entendu, g est supposée solution de (E), donc $g''(x) - g(x) = f(x)$. On peut alors écrire $h''(x) - h(x) = g''(x) - g(x) - (g''(-x) - g(-x)) = f(x) - f(-x) = 0$ puisque la fonction f est supposée paire. La fonction h est donc bien solution de l'équation homogène (H). On a $h(0) = g(0) - g(0) = 0$ et $h'(0) = g'(0) + g'(0) = 0$ puisque par définition $g'(0) = 0$. Or, on sait que h est de la forme $x \mapsto A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x)$, et la seule fonction de cette forme vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$ est la fonction nulle. On a donc $h(x) = 0$, soit $g(x) = g(-x)$, et la fonction g est bien paire.

5. Tentons subtilement dans ce cas de poser $h(x) = g(x) + g(-x)$, on aura alors $h'(x) = g'(x) - g'(-x)$ puis $h''(x) = g''(x) + g''(-x)$. Par hypothèse, $g''(x) - g(x) = f(x)$, et le même calcul que ci-dessus prouve que h reste solution de l'équation homogène (H) (on a cette fois $h''(x) - h(x) = f(x) + f(-x)$ qui est nul par hypothèse). De même, on prouve que la fonction h est nulle, et on en déduit que g est impaire.

6. (a) On calcule pour changer $v'(x) = u'(x+T) - u'(x)$ et $v''(x) = u''(x+T) - u''(x)$, et on en déduit que $v''(x) - v(x) = u''(x+T) - u(x+T) - (u''(x) - u(x)) = f(x+T) - f(x) = 0$ par hypothèse. La fonction v est donc solution de (H).

   (b) Comme dans les deux questions précédentes, $v(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x)$, donc $v(0) = A = u(T) - u(0)$, et $v'(0) = B = u'(T) - u'(0)$. On en déduit que $v(x) = (u(T) - u(0))\operatorname{ch}(x) + (u'(T) - u'(0))\operatorname{sh}(x)$.

   (c) Si u est T-périodique, alors u' aussi et on a donc clairement $u(T) = u(0)$ et $u'(T) = u'(0)$.

La réciproque est à peine plus dure : si on suppose les deux conditions vérifiées, alors la fonction définie ci-dessus est nulle (il n'y qu'à regarder son expression !), ce qui prouve donc que $u(x+T) - u(x) = 0$, c'est-à-dire exactement que u est fonction T-périodique.

(d) On sait très bien que toutes les solutions u de notre équation peuvent s'écrire sous la forme $u(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x) + g(x)$ (puisque g est une solution particulière de l'équation). On a donc $u(0) = A$ et $u'(0) = B$ (puisque $g(0) = g'(0) = 0$), et $u(T) = A\operatorname{ch}(T) + B\operatorname{sh}(T) + g(T)$ et $u'(T) = A\operatorname{sh}(T) + B\operatorname{ch}(T) + g'(T)$. Notre solution est donc T-périodique si et seulement si $A\operatorname{ch}(T) + B\operatorname{sh}(T) + g(T) = A$ et $A\operatorname{sh}(T) + B\operatorname{ch}(T) + g'(T) = B$. Puisqu'on veut prouver que la solution périodique existe et est unique, il suffit donc de prouver que le système précédent admet une solution unique. On peut par exemple, en notant E_1 et E_2 ses deux équations, effectuer l'opération $(\operatorname{ch}(T) - 1) \times E_1 - \operatorname{sh}(T) \times E_2$ pour obtenir $A((\operatorname{ch}(T)-1)^2 - \operatorname{sh}^2(T)) + (\operatorname{ch}(T)-1)g(T) - \operatorname{sh}(T)g'(T) = 0$. On trouve une unique valeur pour A à condition d'avoir $(\operatorname{ch}(T)-1)^2 - \operatorname{sh}^2(T) \neq 0$, soit $1 - 2\operatorname{ch}(T) + 1 \neq 0$ en utilisant l'identité $\operatorname{ch}^2(T) - \operatorname{sh}^2(T) = 1$. Or $2 - 2\operatorname{ch}(T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$, ce qui est évidemment impossible. La constante A prend donc une valeur unique. On fait exactement le même raisonnement pour B en effectuant l'opération $\operatorname{sh}(T) \times E_1 - (\operatorname{ch}(T) - 1) \times E_2$, pour la même conclusion. La solution périodique u_0 est donc bien unique.

(e) Posons comme d'habitude $h : x \mapsto u_0(x) - u_0(-x)$, on a $h''(x) = u_0''(x) - u_0''(-x) = u_0(x) + f(x) - u_0(-x) - f(-x)$ puisque u_0 est solution de (E). Comme f est supposée paire, $h''(x) = h(x)$, et h est solution de l'équation (H). On a donc h qui s'exprime sous la forme $A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x)$, mais qui est en même temps T-périodique puisque u_0 l'est. Ce n'est possible que si $A = B = 0$, ce qui prouve que u_0 est une fonction paire.

(f) Dans le cas où $f(x) = \cos^2(x)$, la fonction f est π-périodique (puisque $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, en élevant au carré, la différence de signe disparait). On a déterminé toutes les solutions de l'équation tout à l'heure, et la solution particulière $x \mapsto -\dfrac{1}{10}\cos(2x)$ est manifestement paire et π-périodique. Il s'agit donc de la solution u_0 (qui est de toute façon unique).