Devoir Maison n°3

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 29 novembre 2016

Pour vous occuper pendant que je ne suis pas là, un DM spécial équations différentielles du second ordre, vous allez adorer !

Problème 1

On cherche à résoudre l'équation (non linéaire) du second ordre $x^2y'' - xy' + y = x + \sin(\ln(x))$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Les deux questions présentent deux méthodes de résolution différentes de cette équation, et sont donc complètement indépendantes.

1. Résoudre cette équation à l'aide du changement de variable $y = \ln(x)$ (autrement dit, en posant $y(x) = g(\ln(x))$).
2. En posant $z = xy' - y$, montrer que y est solution de l'équation initiale si et seulement si z est solution de l'équation $xz' - z = x + \sin(\ln(x))$, résoudre cette équation (on pourra utiliser des IPP pour déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(\ln(x))}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(\ln(x))}{x^2}$), et en déduire les solutions de l'équation initiale.

Problème 2

On cherche dans ce problème à étudier les équations différentielles de la forme $y'' - y = f(x)$ (équation notée (E) dans la suite de l'exercice). On notera (H) l'équation homogène associée $y'' - y = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (H) est constitué des fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit y une fonction deux fois dérivable, on pose $z(x) = e^{-x}y(x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 à préciser. En déduire qu'il existe (au moins) une solution à l'équation (E), puis qu'il existe une unique solution g de l'équation (E) vérifiant $g(0) = g'(0) = 0$.
3. Résoudre l'équation (E) et déterminer la solution g lorsque $f(x) = x^3 + x$, puis lorsque $f(x) = \cos^2(x)$.
4. On suppose dans cette question que la fonction f est paire. Montrer que la fonction $h : x \mapsto g(x) - g(-x)$ est solution de (H). Calculer $h(0)$ et $h'(0)$ et en déduire que g est paire.
5. Que peut-on démontrer dans le cas où f est impaire ?
6. On suppose cette fois-ci que la fonction f est T-périodique, et on note u une solution de (E).
   (a) Montrer que $v : x \mapsto u(x + T) - u(x)$ est solution de l'équation (H).
   (b) Exprimer v à l'aide des réels $u(T) - u(0)$ et $u'(T) - u'(0)$, et des fonctions ch et sh.
   (c) Montrer que u est une fonction T-périodique si et seulement si $u(T) = u(0)$ et $u'(T) = u'(0)$.
   (d) En déduire qu'il existe une unique solution T-périodique à l'équation (E). On la note u_0.
   (e) Montrer que, si f est paire, u_0 est aussi paire.
   (f) Déterminer u_0 dans le cas où $f(x) = \cos^2(x)$.