Devoir Maison n°2

PTSI B Lycée Eiffel

17 octobre 2016

Exercice 1

Parmi les douze mille méthodes possibles, on peut commencer par utiliser la formule de duplication $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ pour la mettre sous la forme $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(\cos(2a)+1)$. En notant S la somme qu'on nous demandait de calculait, on a donc $S = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right)+1\right) = \frac{\cos(\frac{2\pi}{9})+\cos(\frac{4\pi}{9})+\cos(\frac{6\pi}{9})+\cos(\frac{8\pi}{9})}{2} + 2$. Or on sait très bien que $\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. De plus, en utilisant une superbe transformation somme-produit, on peut écrire que $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ (les deux autres facteurs se simplifient). Or, ça tombe merveilleusement bien, $\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$. Il ne reste donc plus que $S = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$.

Exercice 2

1. Les fonctions sh et arctan étant toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, $\arctan \circ \mathrm{sh}$ l'est aussi. C'est moins évident pour la deuxième moitié puisque la fonction arccos n'est définie que sur $[-1,1]$, mais ça tombe bien, la fonction th est justement à valeurs dans cette intervalle, ce qui permet d'affirmer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. La fonction f est toujours dérivable (th ne prend jamais les valeurs 1 et -1 qui sont les seules pour lesquelles arccos n'est pas dérivable), et $f'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} - \frac{\mathrm{th}'(x)}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}}$.
Or, on sait bien que $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ et que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ (c'est la seule formule de trigonométrie hyperbolique à connaitre), donc $1+\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x)$, et notre premier quotient se simplifie en $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ (qui est bien défini sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction ch ne s'annule jamais). Pour la deuxième moitié, on peut utiliser les résultats vus dans le problème de la feuille d'exercices : $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, et $1-\mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ également. Comme ch est une fonctionn strictement positive, $\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} = \mathrm{ch}(x)$, et la deuxième moitié de notre dérivée se simplifie exactement comme la première pour donner la conclusion inattendue que $f'(x) = 0$. La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$, égale à $f(0) = \arctan(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
3. Rappelons qu'une des expression de la fonction th est $\mathrm{th}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, ce qui permet de transformer l'équation à résoudre en équation équivalente $13(e^{2x}-1) = 5(e^{2x}+1)$, soit

$e^{2x} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$. On en déduit que $2x = \ln\left(\frac{9}{4}\right) = 2\ln(3) - 2\ln(2)$, donc l'unique solution est $x = \ln(3) - \ln(2)$.

4. La fonction arctan étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $\arctan(y) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$ ne peut avoir qu'au plus une solution (peut-être zéro). Or, on sait que, si $x = \ln(3) - \ln(2)$, alors $\text{th}(x) = \frac{5}{13}$, et qu'alors $f(x) = \arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th}(x)) = \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que $y = \text{sh}(x)$ est une solution de l'équation. Il ne reste donc plus qu'à calculer la valeur de $\text{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{e^{\ln(\frac{3}{2})} + e^{-\ln(\frac{3}{2})}}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{13}{12}$.

Exercice 3

1. Le premier quotient dans la définition de la fonction est clairement défini sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Ce qui se trouve dans le ln est toujours positif, mais n'est pas défini lorsque $x = 1$ (à cause du dénominateur), et s'annule en $x = -1$ (à cause du numérateur) ce qui empêche la définition du ln. Finalement, les deux morceaux définissant g ont le même domaine de définition, et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
2. Le domaine de définition de g est symétrique par rapport à 0 et, lorsque cela a un sens, $g(-x) = \frac{-2x}{1-x^2} - \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = -\frac{2x}{1-x^2} + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -g(x)$ en se rappelant simplement que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$. La fonction g est donc une fonction impaire.
3. La séparation du ln en deux morceaux est immédiate, reste à trouver les deux réels tels que $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{2x}{1-x^2}$. Soit on met le membre de gauche au même dénominateur et on procède à une petite identification des coefficients pour déterminer rapidement a et b, soit on triche un peu en écrivant que $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$. On en déduit que $a = 1$ et $b = -1$.
4. On peut se contenter de calculer les limites en 1 et en $+\infty$, les autres seront déduites en utilisant l'imparité de la fonction g. Commençons donc par constater que $\lim\limits_{x\to 1} -\frac{1}{1+x} + \ln|1-x| - \ln|1+x| = -\frac{1}{2} - \ln(2)$ qui est un réel non nul. D'un autre côté, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$. Par symétrie, on aura donc $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$. Reste la limite en $+\infty$ pour laquelle la décomposition de la question précédente ne sert à rien : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$ (quotient des termes de plus haut degré, on factorise en haut et en bas par x si on tient à perdre du temps), et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1$ (même raison), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 0$ (et de même en $-\infty$ par symétrie).
5. Là aussi on peut se contenter d'étudier les variations sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$. Commençons par exemple par l'intervalle $[0, 1[$, où ce qui se trouve dans chacun des deux ln est positif (on peut donc oublier les valeurs absolues). On peut donc calculer $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)^2 + (1-x)^2}{(1-x^2)^2} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{2+2x^2-2(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}$. Cette dérivée étant manifestement positive sur $[0, 1[$, la fonction g y sera donc strictement décroissante (ainsi que sur $]-1, 0]$ par symétrie). Passons à l'intervalle $]1, +\infty[$, où on a cette fois-ci

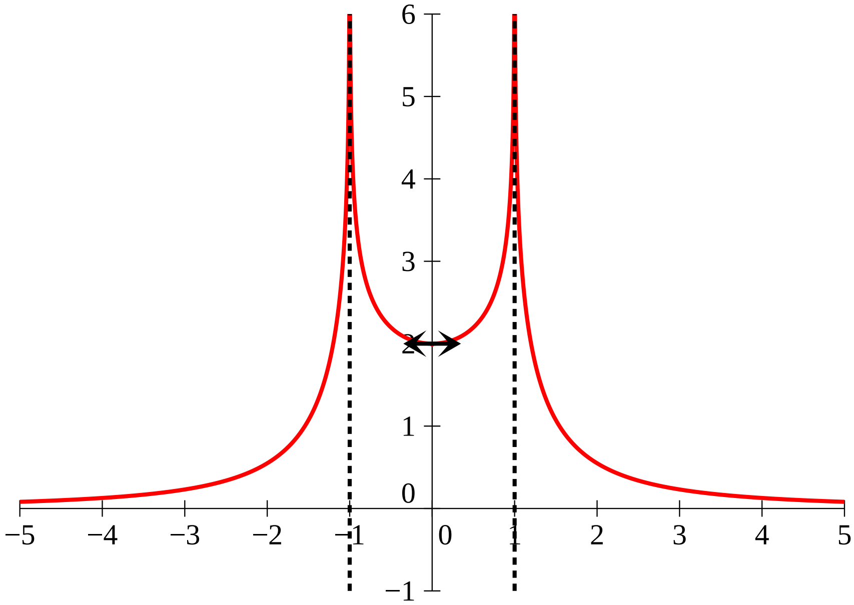
$\ln|1-x| = \ln(x-1)$, et donc $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{1+x}$. En fait l'expression est exactement la même que précédemment et on a à nouveau une dérivée qui est positive. La fonction g est donc croissante sur chacun de ses intervalles de définition, on peut dresser le tableau suivant pour conclure son étude :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

6. Manifestement, la fonction g est donc positive quand $x < -1$ et quand $x \in [0,1[$ et négative sur $]-1,0]$ et sur $]1,+\infty[$.
7. La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. C'est le produit de deux fonctions impaires (la fonction inverse, et le ln qu'on a déjà étudié plus haut), donc f est paire. On peut donc se contenter de calculer la moitié des limites. En 0, ce qui se trouve dans le ln tend vers 1, et on a du coup une superbe forme indéterminée qu'il est malheureusement difficile de gérer. La méthode la plus simple consiste à écrire (sans valeur absolue tant qu'on est sur $]-1,1[$) que $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} - \dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Chacun de ces deux termes peut être vu comme un taux d'accroissement : par exemple $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}$ est le taux d'accroissement en 0 de la fonction $u : x \mapsto \ln(1+x)$, et tend donc quand x tend vers 0 vers $u'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$. C'est exactement pareil pour le deuxième terme avec la fonction $v : x \mapsto \ln(1-x)$, et on obtient pour limite $v'(0) = -\dfrac{1}{1-0} = -1$. Finalement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$. Pour les limites en 1, aucun problème, il n'y a pas de forme indéterminée, et même le signe ne pose pas de problème avec la valeur absolue : ce qui se trouve dans le ln va tendre vers $+\infty$ à gauche comme à droite de 1, et du coup $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Par symétrie, on en déduit que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$. Enfin, en $+\infty$, on a déjà vu que le ln allait tendre vers 0, il n'y a donc pas de forme indéterminée non plus et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
   Passons à l'étude des variations. La fonction f est dérivable sur chacun de ses intervalles de définition, et on peut dériver directement sans distinguer de cas en se rappelant que $\ln|u|$ a pour dérivée $\dfrac{u'}{u}$ quel que soit le signe de u. Commençons d'ailleurs par poser $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et calculons $u'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, donc $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{2}{1-x^2}$. On peut ensuite calculer $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + \dfrac{2}{x(1-x^2)} = \dfrac{1}{x^2}g(x)$. Ah ben ça c'est une bonne surprise ! On peut donc exploiter directement les résultats de la question 6 pour dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

   Voici une allure de la courbe représentative correspondante :



La dernière question est une immonde arnaque puisque ça ne découle absolument pas de façon évidente de l'étude précédente. On peut déjà évacuer rapidement le cas où $a = 0$. Dans ce cas, x est solution de l'équation si $|1+x| = |1-x|$, ce qui ne se produit que lorsque $x = 0$ (x doit être à égale distance de 1 et de -1). Supposons maintenant $a > 0$ (si $a < 0$, le nombre de solutions de l'équation sera le même pour a et $-a$ par symétrie de la courbe représentative de f). Le plus simple est en fait d'étudier rapidement la fonction $h : x \mapsto \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ pour obtenir son tableau de variations. On a déjà fait à peu près tous les calculs précédemment : la fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, toutes les limites ont été calculées plus haut pour obtenir celles de g, et on a déjà calculé $h'(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$, qui est positif sur $]-1,1[$ et négatif le reste du temps. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Il est maintenant facile de constater que, si $a > 0$, l'équation $h(x) = a$ admet exactement deux solutions (une sur l'intervalle $]0,1[$, l'autre sur l'intervalle $]1,+\infty[$). Si $a < 0$, toujours deux solutions, mais négatives cette fois-ci.