Devoir Maison n°2

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 17 octobre 2016

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

Exercice 2

On rappelle que la fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ (on pourra si on le souhaite réutiliser les résultats vus dans le problème de la feuille d'exercices n°2 concernant cette fonction). On pose désormais $f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \arccos(\mathrm{th}(x))$.

1. Quel est le domaine dé définition de la fonction f ?
2. Calculer $f'(x)$ lorsque cela a un sens, en déduire une expression simplifiée de f.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{th}(x) = \dfrac{5}{13}$.
4. En déduire les solutions de l'équation $\arctan(y) + \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x}{1-x^2} - \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction g.
2. Étudier la parité de la fonction g.
3. Déterminer deux réels a et b tels que $g(x) = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x} + \ln|1-x| - \ln|1+x|$.
4. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
5. Étudier les variations de g, et dresser son tableau de variations.
6. En déduire le signe de g.
7. On pose désormais $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. Faire une étude complète de la fonction f (courbe comprise), et en déduire en fonction de a le nombre de solutions de l'équation $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = a$.