Devoir Maison n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

20 septembre 2016

Exercice 1

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1, 1]$.
   (b) $\exists T \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+T) = \cos(x)$ (mieux vaut enlever la valeur 0 pour la période).
   (c) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists z' \in \mathbb{C}$, $(z')^2 = z$.
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
2. (a) Démonstration technique : $(A \cup B) \backslash C = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

   Démonstration « avec les mains » : un élément appartenant à $(A \cup B) \cap \overline{C}$ appartient soit à A, soit à B (éventuellement aux deux) et dans les deux cas n'appartient pas à C. On a donc deux possibilités : soit l'élément appartient à A et pas à C, soit à B et pas à C, ce qui correspond bien à l'ensemble $(A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ (la réciproque est tout aussi simple).

   (b) Dans le sens indirect, si $B \subset A \subset C$, on aura simplement $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$, donc on a bien $A \cup B = A \cap C$. Dans l'autre sens, si on suppose que $A \cup B = A \cap C$, il suffit en fait de constater qu'on a toujours $A \cup B \subset A$, et $A \subset A \cap C$. L'égalité n'est donc possible que si tous ces ensembles sont égaux, et en particulier si $A \cup B = A$, et $A \cap C = A$. Ceci ne se produit que si $B \subset A$ (on peut détailler cette démonstration si on le souhaite), et si $A \subset C$.

   (c) Supposons donc dans un premier temps $B \subset A$. Soit X un ensemble quelconque, alors $A \cap (X \cup B) = (A \cap X) \cup (A \cap B)$. Or, $A \cap B = B$ lorsque $B \subset A$! L'union se résume donc à $(A \cap X) \cup B$, exactement ce qu'on voulait. Dans l'autre sens, on va passer par la contraposée. Supposons donc que B n'est pas inclus dans A. Cela signifie exactement la chose suivante : il existe (au moins) un élément x appartenant à l'ensemble B mais pas à l'ensemble A. Posons alors $X = \{x\}$ (ensemble contenant uniquement l'élément x). L'ensemble $(A \cap X) \cup B$ contient certainement l'élément x puisque celui-ci appartient à B. D'un autre côté, l'ensemble $A \cap (X \cup B)$ ne peut pas contenir x puisque ce dernier n'appartient pas à A. On ne peut donc pas avoir $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$ (en fait, on pouvait prendre absolument n'importe quoi pour l'ensemble X, ça ne marche jamais dans ce cas !). On a bien prouvé la réciproque de notre propriété, qui est donc une équivalence.

Exercice 2

Partie A : Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

1. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty$, on a facilement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ce n'est pas plus compliqué en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) - 2 = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
2. La fonction f est dérivable comme produit et somme de fonctions usuelles, et $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2} = \dfrac{u(x)}{x^2}$, où u est la fonction définie à la question suivante.

3. (a) La fonction u est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $u'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$, quantité manifestement positive sur notre intervalle d'étude (même pas besoin de mettre au même dénominateur !).

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée non plus), la fonction u, étant continue et strictement croissante, effectue une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α. Comme $u(2) = \ln(2) - 1 < 0$ (rappelons que $\ln(2) \simeq 0.7$), et $u(3) = \ln(3) > 0$, on a bien $\alpha \in [2, 3]$. On sort l'engin du diable pour la fin de la question : $u(2.2) \simeq -0.01 < 0$ et $u(2.21) \simeq 0.003 > 0$. Ça marche !

   (c) La fonction étant croissante, $u(x) \leq 0$ sur $]0, \alpha]$, et $u(x) \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$.

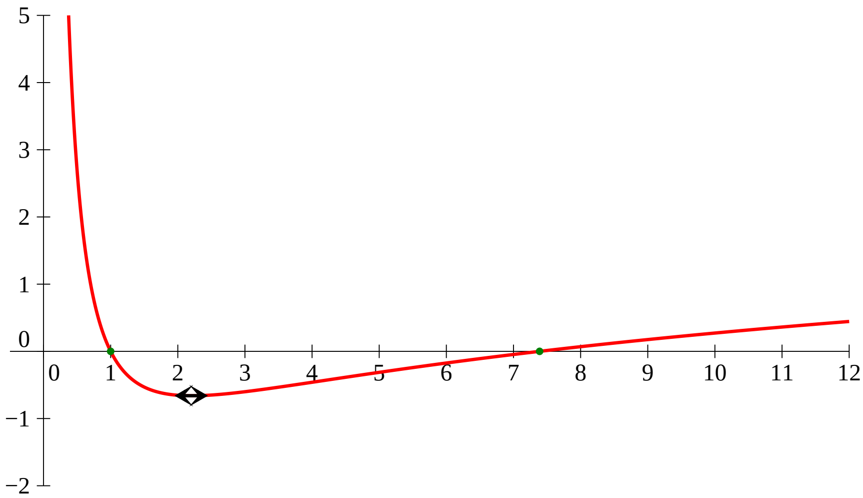
4. (a) Puisque $f'(x)$ est du même signe que $u(x)$, la fonction f est donc décroissante sur $]0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

   (b) Par définition, $u(\alpha) = 0$, donc $\ln(\alpha) + \alpha - 3 = 0$. Autrement dit, $\ln(\alpha) = 3 - \alpha$. On peut donc écrire $f(\alpha) = \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)(3 - \alpha - 2) = \dfrac{(\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha} = -\dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$. Or, on sait que $2.2 \leq \alpha \leq 2.21$, donc $1.2 \leq \alpha - 1 \leq 1.21$, puis $1.44 \leq (\alpha - 1)^2 \leq 1.4641$. Par ailleurs, $0.452 \leq \dfrac{1}{2.21} \leq \dfrac{1}{\alpha} \leq \dfrac{1}{2.2} \leq 0.455$. On peut tout multiplier (tout est positif) pour obtenir (en arrondissant un peu, par défaut à gauche et pas excès à droite) $0.65 \leq \dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \leq 0.67$. En passant à l'opposé, on peut donc écrire l'encadrement suivant : $-0.67 \leq f(\alpha) \leq -0.65$.

5. (a) Le réel $f(x)$ est du même signe que $(x - 1)(\ln(x) - 2)$ (le x du dénominateur étant positif), on peut faire un petit tableau :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x) - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (b) On place bien entendu tous les éléments issus des calculs précédents sur la courbe :



Partie B : Étude d'une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

1. (a) Puisque F a par définition pour dérivée f, on peut dresser son tableau de variations :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

(b) Elles sont horizontales.

2. (a) En effet, la dérivée de la fonction proposée (appelons-la g) vaut $g'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$, et $g(e) = e\ln(e) - e = e - e = 0$.

(b) Non, là ça suffit, je ne rédige pas cette question, il suffit de développer !

(c) Un primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, qui est de la forme $u'u$, est de la forme $\dfrac{u^2}{2}$, soit ici $\dfrac{\ln(x)^2}{2}$. Une primitive de la fonction f peut alors s'écrire sous la forme $F(x) = x\ln(x) - x - \dfrac{1}{2}\ln(x)^2 + 2\ln(x) - 2x + k$, où k est une constante restant à déterminer. On calcule pour cela $F(1) = 0 - 1 - 0 + 0 - 2 + k$, ce qui permet de conclure assez facilement que $k = 3$. Finalement, $F(x) = x\ln(x) - 3x - \dfrac{1}{2}\ln(x)^2 + 2\ln(x) + 3$.

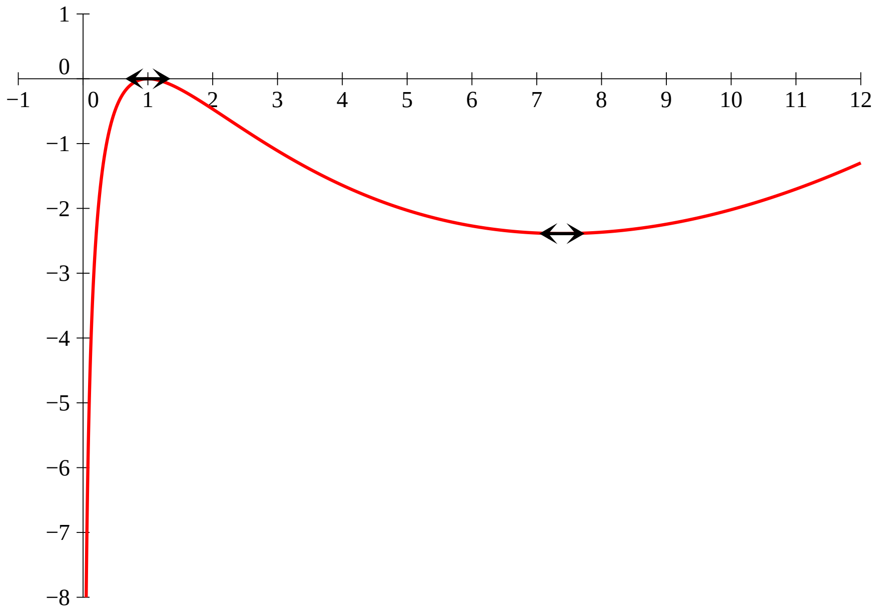
3. (a) Á part la limite donnée dans l'énoncé, seul le terme en $2\ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x)^2 = \ln(x)\left(2 - \dfrac{1}{2}\ln(x)\right)$ a une limite infinie, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$.

(b) Il suffit de tout factoriser par $x\ln(x)$, ce qui donne bien $F(x) = x\ln(x)\left(1 - \dfrac{3}{\ln(x)} - \dfrac{\ln(x)}{2x} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x\ln(x)}\right)$. Tout ce qui se trouve dans la parenthèse tend vers 1 (le seul petit problème étant le $\dfrac{\ln(x)}{x}$ qui tend vers 0 par croissance comparée), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

(c) Pour compléter le tableau, on calcule $F(1) = -3 + 3 = 0$. Ah ben oui, ce n'est pas une surprise puisque par définition F s'annule en 1. Par contre, on doit vraiment calculer $F(e^2) = 2e^2 - 3e^2 - \dfrac{4}{2} + 4 + 3 = 5 - e^2$. Voici le tableau complet :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$5 - e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Bon, je ne vais pas respecter l'énoncé (c'est mal) et tracer la courbe indépendamment de la précédente :



4. Cette aire est par définition égale à $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\ dx = [F(x)]_1^{e^2} = F(e^2) - F(1) = 5 - e^2$.