Devoir Maison n°1

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 20 septembre 2016

Exercice 1

1. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) La fonction cosinus ne prend que des valeurs appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
   (b) La fonction cosinus est périodique.
   (c) Tout nombre complexe admet des « racines carrées » (des nombres complexes dont le carré est le nombre dont on est parti).
   (d) La suite (u_n) est strictement croissante.
2. Démontrer les propriétés suivantes (on note $A\backslash B$ l'ensemble $A \cup \overline{B}$ constitué des éléments appartenant à A mais pas à B) :
   (a) $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$
   (b) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
   (c) $B \subset A \Leftrightarrow \forall X \subset E, (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$

Exercice 2

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie A : Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

On considère la fonction f, définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2)$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.
   (a) Étudier les variations de u.
   (b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle [2 ;3]. Montrer que $2.20 < \alpha < 2.21$ (calculatrice autorisée pour cette question).
   (c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $[0; +\infty[$.
4. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Exprimer $\ln(\alpha)$ comme polynôme en α. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5. (a) Étudier le signe de $f(x)$.
   (b) Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B : Étude d'une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$.
   (b) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. Calcul de $F(x)$.
   (a) Vérifier que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est la primitive de la fonction ln s'annulant en $x = e$.
   (b) Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x) = \ln(x) - \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{2}{x} - 2$.
   (c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. (a) On admet que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.
   (b) Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,
   $F(x) = x\ln x\left(1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{\ln(x)}\right) + 3$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations de F.
   (d) Tracer (Γ) sur le même graphique que $(\mathcal{C})$.
4. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.