Concours Blanc : corrigé

PTSI A et B Lycée Eiffel

6 juin 2017

Exercice 1

1. L'équation normalisée $y' - \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}y = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$ n'est pas définie en 0, d'où les deux intervalles de résolution. L'équation homogène associée admet pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{\ln(\mathrm{sh}(x))} = K\,\mathrm{sh}(x)$, avec $K \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (sur cet intervalle, la fonction sh est positive, pas besoin de valeur absolue dans le ln). Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, on doit prendre $e^{\ln(|\mathrm{sh}(x)|} = -\mathrm{sh}(x)$, mais quitte à changer le signe de la constante ensuite, ça ne change rien, et les solutions sont de la forme $x \mapsto L\,\mathrm{sh}(x)$, avec $L \in \mathbb{R}$.

   Reste à déterminer une solution particulière de l'équation sur chacun des deux intervalles. On en a en fait une qui est triviale, la fonction ch. En effet, on sait que $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$, et que $\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x) = -(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)) = -1$ (formule du cours). Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $x \mapsto \mathrm{ch}(x) + K\,\mathrm{sh}(x)$ sur $]0, +\infty[$, et de la forme $x \mapsto \mathrm{ch}(x) + L\,\mathrm{sh}(x)$ sur $]-\infty, 0[$.
2. Pour avoir des solutions définies sur $\mathbb{R}$, il faut réussir à recoller les solutions de façon à obtenir des fonctions continues et dérivables en 0. Posons donc $f(x) = \mathrm{ch}(x) + K\,\mathrm{sh}(x)$ sur $]0, +\infty[$, et $g(x) = \mathrm{ch}(x) + L\,\mathrm{sh}(x)$ sur $]-\infty, 0[$. On obtient dans un premier temps $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, donc on peut recoller les fonctions quelles que soient les valeurs des deux constantes pour obtenir une fonction continue en 0 (en posant bien entendu $y(0) = 1$). Pour que la fonction prolongée soit dérivable en 0, il suffit que les dérivées des fonctions f et g admettent une limite finie commune en 0 (théorème du prolongement de la dérivée). Calculons donc : $f'(x) = \mathrm{sh}(x) + K\,\mathrm{ch}(x)$ admet pour limite K en 0, et de même g' admet pour limite L en 0, le prolongement n'est donc dérivable que si $K = L$. On vérifie aisément que, dans ce cas, on peut simplement définir la solution recollée y par l'unique formule $y(x) = \mathrm{ch}(x) + K\,\mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. C'est en fait idiot, les fonction obtenues à la question précédente sont manifestement toutes $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto (\ln(x))^n$ étant définie et continue sur l'intervalle $[1, e]$, elle y admet des primitives et l'intégrale existe. On calcule directement $I_0 = \displaystyle\int_1^e 1\ dx = e - 1$, puis $I_1 = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\ dx = [x\ln(x) - x]_1^e = e - e - (0 - 1) = 1$.
2. Sur l'intervalle $[1, e]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$, et donc, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant (\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$. On peut intégrer ces inégalités pour obtenir immédiatement $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, ce qui prouve la décroissance de la suite (I_n).
3. On a déjà prouvé à la question précédente que $I_n \geqslant 0$, la suite est donc décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l positive ou nulle.

4. Ce genre de relation de récurrence se prouve généralement à l'aide d'une IPP, celle-ci ne fait pas exception. Toutes les fonctions utilisées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle d'intégration, l'IPP est justifiée. On va poser $u(x) = (\ln(x))^{n+1}$, ce qui implique $u'(x) = (n+1)\dfrac{\ln(x)^n}{x}$, et $v'(x) = 1$, on peut alors prendre $v(x) = x$. On obtient donc $I_{n+1} = [x(\ln(x))^{n+1}]_1^e - \displaystyle\int_1^e x \times (n+1)\frac{(\ln(x))^n}{x}\,dx = e - (n+1)I_n$.
5. La relation précédent peut aussi s'écrire $I_n = \dfrac{e - I_{n+1}}{n+1}$. Le numérateur $e - I_{n+1}$ ayant une limite finie (puisque la suite converge), on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6. On reprend à nouveau la relation précédente : $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ a pour limite e d'après la question précédente, donc $I_n \sim \dfrac{e}{n+1}$.

Exercice 3

1. Il suffit d'écrire $F = \mathrm{Vect}(A, B, C)$ pour se rendre compte que F est un sous-espace vectoriel de E. La famille (A, B, C) est donc génératrice de F, et c'est assez trivialement une famille libre (la matrice $aA + bB = cC = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ne peut être nulle que si $a = b = c = 0$), donc c'est une base du sous-espace vectoriel F, qui est de dimension 3.
2. Même pas besoin de faire le calcul, c'est du cours : le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
3. Une matrice de F étant triangulaire supérieure, elle est inversible si et seulement a et c sont tous les deux non nuls. Dans ce cas, sa matrice inverse est la matrice $\dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (cette formule est applicable directement, mais se retrouve en une ligne de pivot de Gauss si besoin), qui est bien une matrice appartenant à F.
4. Commençons par signaler que $f(M)$ est bien une matrice de F puisque F est stable par produit et que la matrice T est une matrice de F. Reste à prouver que l'application f est linéaire : pour toutes matrices M et N appartenant à F, et pour tout réel λ, on calcule $f(\lambda M + N) = T(\lambda M + N)T = \lambda TMT + TNT = \lambda f(M) + f(N)$, ce qui prouve la linéarité de f, qui est donc bien un endomorphisme de M.
5. La matrice T est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale, elle est certainement inversible. En notant $N = f(M)$, on peut alors écrire que $N = TMT \Leftrightarrow T{-}1NT^{-1} = M$, et l'application f est donc bijective avec pour réciproque $f^{-1} : N \mapsto T^{-1}NT^{-1}$.
6. L'application u peut donc être définie par les équations suivantes : $u(x, y) = (x + y, y)$. Un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient au noyau de $u - \mathrm{id}$ si $u(x, y) = (x, y)$, donc si et seulement si $x + y = x$, soit $y = 0$. On en déduit immédiatement que $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1, 0))$.
7. On commence par calculer $f(A) = TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B$; $b(B) = TBT = B$ et $f(C) = TCT = B + C$. La matrice S est donc la matrice trois lignes trois colonnes suivante : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8. En notant a, b et c les trois coordonnées de la matrice M dans la base (A, B, C), d'après la question précédente, on aura $f(M) = \lambda M$ si et seulement si $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$, ce qui

nous ramène au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & & & = & \lambda a \\ a & + & b & + & c & = & \lambda b \\ & & & & c & = & \lambda c \end{array}\right.$. Comme on a supposé que $\lambda \neq 1$, les équation extrêmes impliquent que $a = c = 0$, et l'équation du milieu devient alors $b = \lambda b$, qui n'a elle-même que 0 comme solution. La seule matrice solution est donc la matrice nulle.

9. On obtient sans difficulté $H^2 = 0$. On en déduit immédiatement que, $\forall k \geqslant 2$, $H^k = 0$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton aux deux matrices I et aH (qui commutent, puisque la matrice identité I commute avec toute autre matrice de taille compatible) : $(aH + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aH)^k I^{n-k} = I + n \times (aH)^1 = I + naH$ puisque tous les termes suivants de la somme s'annulent.
10. La matrice S étant égale à $I + H$, on applique le résultat précédent pour $a = 1$: $S^n = I + nH$.

Exercice 4

I. Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$.

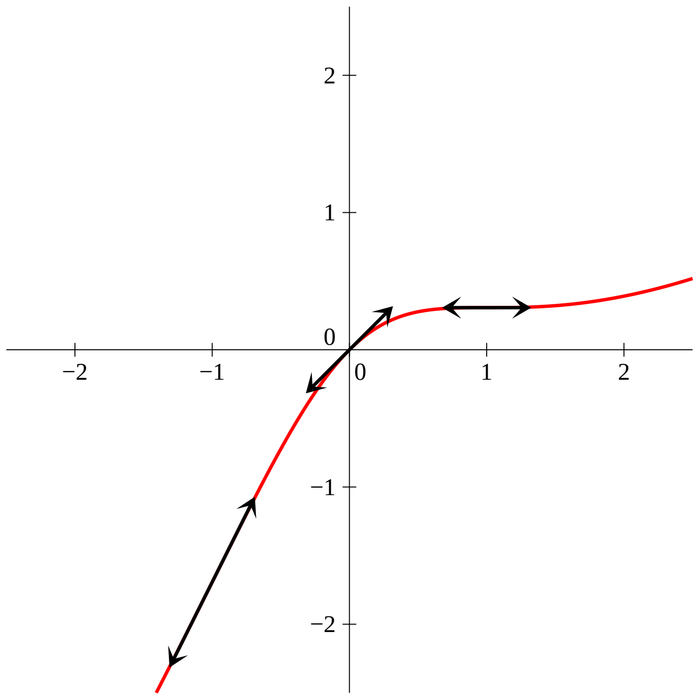
1. (a) La fonction f est bien définie et dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$ puisque ce qui se trouve dans le ln est toujours strictement positif. On calcule aisément $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2}$.
   (b) On peut écrire $f'(x) = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, qui est toujours positif. La seule valeur d'annulation de la dérivée est en $x = 1$, et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Calculons donc : $f''(x) = -\dfrac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2-2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$. La dérivée seconde s'annule donc en 1 et en -1.
2. Il n'ay aucun problème en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée). Par contre, c'est plus compliqué en $+\infty$, on peut par exemple écrire que $f(x) = x - \ln\left(x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = x\left(1 - \dfrac{2\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right)$. Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x} = 0$, et par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 0$, donc toute la parenthèse tend vers 1. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On peut d'ailleurs dresser un tableau de variations complet pour la fonction f, en signalant que $f(1) = 1 - \ln(2)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1 - \ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On connait le développement limité en 0 de $\ln(1+x)$ qui donne $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Comme x^2 tend vers 0 quand x tend vers 0, on peut en déduire que $\ln(1+x^2) \underset{x \to 0}{=} x^2 + o(x^2)$, et on en déduit le DL de f : $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$. L'existence d'un DL à l'ordre 1 en 0 prouve que la fonction est dérivable en 0 (on le savait déjà) et que sa tangente y aura pour équation $y = x$. De plus, $f(x) - x \sim -x^2$ est négatif au voisinage de 0, donc la courbe de f sera localement située en-dessous de cette tangente au voisinage de 0.
4. Pour calculer un DL en 1, on pose $x = 1 + h$, de façon à avoir h qui tend vers 0 pour avoir le droit d'appliquer les développements limités usuels : $f(1+h) = 1 + h - \ln(1 + (1+h)^2) =$

$1+h-\ln(2+2h+h^2) = 1+h-\ln(2)-\ln\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right) = 1-\ln(2)+h-\left(h+\frac{h^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(h+\frac{h^2}{2}\right)^2+o(h^2) = 1-\ln(2)+h-h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h^2+o(h^2) = 1-\ln(2)+o(h^2)$. En fait ce calcul était tout à fait inutile puisqu'on a déjà prouvé lors des premières questions de l'exerice que f' et f'' s'annulaient en 1. Une simple application de la formule de Taylor-Young aurait alors donné le résultat.

5. À l'origine, la tangente a déjà été donnée. La tangente au point d'abscisse 1 est horizontale. Comme $f'(-1) = 2$ et $f(-1) = -1-\ln(2)$, donner l'équation précise de la tengente au point d'abscisse -1 n'a pas grand intérêt, on se contentera de tracer une tangente de pente 2 sur la courbe :



6. On va se contenter de faire le changement de variable sur la deuxième moitié de l'intervalle en posant $J = \int_0^1 x\ln(1+x^2)\ dx$. La fonction est bien bijective sur cet intervalle (elle y est strictement croissante), le changement de variable est autorisé. On pose donc $t = 1+x^2$, les bornes vont devenir 1 et 2, et l'élément différentiel deviendra $dt = 2x\ dx$. On en déduit que $J = \int_1^2 \frac{1}{2}\ln(t)\ dt = \frac{1}{2}[t\ln(t)-t]_1^2 = \frac{1}{2}(2\ln(2)-2+1) = \ln(2)-\frac{1}{2}$. On peut maintenant calculer l'intégrale initiale : $\int_0^1 xf(x)\ dx = \int_0^1 x^2\ dx - J = \frac{1}{3}-\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}-\ln(2)$.

II. Étude de suites associées à f.

1. Il suffit de constater que $u_{n+1}-u_n = u_n-\ln(1+u_n^2)-u_n = -\ln(1+u_n^2)$ est toujours négatif.
2. Pour prouver la convergence d'une suite décroissante, il suffit de prouver qu'elle est minorée. Essayons ici de démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$. C'est le cas par hypothèse pour u_0, et si on suppose la propriété vraie au rang n, alors la croissance de la fonction f assure que $u_{n+1} = f(u_n) \in [f(0), f(1)] = [0, 1-\ln(2)]$, donc a fortiori $u_{n+1} \in [0,1]$. Par principe de récurrence, tous les termes de la suite sont donc positifs et la suite converge. Comme il

s'agit d'une suite récurrente définie à l'aide de la fonction continue f, la limite l de la suite est nécessairement un point fixe de la fonction vérifiant donc $f(l) = l$. Or l'équation $f(l) = l$ est équivalente à $\ln(1 + l^2) = 0$ qui a pour unique solution $l = 0$. La suite (u_n) converge donc nécessairement vers 0.

3. Le théorème des accroissements finis peut s'énoncer ainsi : si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. La fonction $t \mapsto \ln(1 + t)$ vérifie certainement les hypothèses du théorème et a pour dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{1 + t}$. Sur l'intervalle $[0, h]$, il existe donc un réel $c < h$ tel que $\dfrac{1}{1 + c} = \dfrac{\ln(1 + h)}{h}$.

   (a) D'après la question précédente, comme $x^2 \in [0, 1]$ (il peut donc jouer le rôle de h), on peut écrire $-\dfrac{\ln(1 + x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{1 + c} \leqslant -\dfrac{1}{2}$ (puisque $c \in [0, x^2] \subset [0, 1]$), donc $-\ln(1+x^2) \leqslant -\dfrac{1}{2}x^2$, et l'inégalité souhaitée en découle. On pouvait bien entendu aussi démontrer cette inégalité en faisant une bête étude de fonction.

   (b) On peut appliquer l'inégalité précédente au réel u_n car il appartient toujours à l'intervalle $[0, 1]$: $f(u_n) \leqslant u_n - \dfrac{1}{2}u_n^2$, soit $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$.

   (c) La suite (v_n) est trivialement croissante (si on y tient on dit que $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 \geqslant 0$ pour le justifier). De plus, d'après la question précédente, $v_n \leqslant 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = 2(u_0 - u_{n+1})$ par télescopage. Comme u_{n+1} est toujours positif, on en déduit que $v_n \leqslant 2u_0$, donc la suite (v_n) est croissante et majorée, elle converge nécessairement.