Concours Blanc : épreuve de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

6 juin 2017

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation de la copie seront pris en compte lors de la correction. En particulier, toute tentative de bluff ou résultat affirmé sans justification sera fortement sanctionné.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = -1$.

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$.
2. L'équation admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. Si oui, déterminer parmi ces solutions celles qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ en 0.

Exercice 2

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n \, dx$.

1. Montrer que I_n existe pour tout entier n, et calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite (I_n).
3. Montrer que la suite (I_n) converge vers une limite l vérifiant $l \geqslant 0$.
4. Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
5. En déduire que $l = 0$.
6. Montrer que $I_n \sim \dfrac{e}{n+1}$.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note enfin $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer une base. Quelle est la dimension de F ?

2. Établir que F est stable par multiplication, c'est-à-dire que $\forall (M,N) \in F^2$, $MN \in F$.
3. Montrer que, pour toute matrice M de F, si M est inversible, alors $M^{-1} \in F$.
4. Pour toute matrice M de F, on note $f(M) = TMT$.
   Prouver que f est un endomorphisme de F.
5. Vérifier que T est inversible, et démontrer que f est un automorphisme de F.
6. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'application linéaire ayant pour matrice T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
7. On note S la matrice de f dans la base (A, B, C) de F. Déterminer S.
8. Soit λ un réel différent de 1, résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in F$.
9. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer H^2, puis, pour entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel a, calculer $(I + aH)^n$.
10. Calculer F^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On pourra utiliser dans l'exercice la valeur approchée $\ln(2) \simeq 0.69$.

I. Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f.
   (c) Calculer $f''(x)$ et résoudre l'équation $f''(x) = 0$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x)$, et effectuer l'étude locale de f en 0.
4. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $f(x)$.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère d'unité 2 centimètres, en précisant les tangentes à $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi qu'aux points dont les abscisses vérifient $f''(x) = 0$.
6. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$ (on pourra effectuer le changement de variable $t = 1 + x^2$.

II. Étude de suites associées à f.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer la convergence de la suite et déterminer sa limite.
3. Énoncer le théorème des accroissements finis, et l'appliquer à la fonction $t \mapsto \ln(1 + t)$ sur l'intervalle $[0, h]$, avec $h \in]0, 1]$.
   (a) Établir que, $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.
   (b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$.
   (c) En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2$ est une suite convergente.