AP n°8

PTSI B Lycée Eiffel

12 mai 2017

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on considère l'application f définie sur E par $f(P) = \dfrac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
4. Montrer que f est un projecteur.

Exercice 2

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (-x-2y-2z, 2x+3y+2z, -2x-2y-z)$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image (sans calcul).
3. Déterminer une base de $F = \ker(f - \mathrm{id})$ et de $G = \ker(f + \mathrm{id})$.
4. Vérifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Reconnaitre l'application linéaire f.
5. Donner l'expression de la projection sur F parallèlement à G (très peu de calculs nécessaires).

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on note $f_n(x) = \dfrac{(1+x)^n \ln(1+x)}{x(2+x)}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions f_0, f_1 et plus généralement de f_n.
2. En déduire pour quelles valeurs de n on peut prolonger f_n par continuité en 0. Prouver que, quand c'est le cas, la fonction prolongée est dérivable en 0, et donner l'équation de la tangente correspondante, ainsi que la position relative de la courbe représentative de f_n et de cette tangente au voisinage de 0.
3. Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en -1 ? Dans le cas où on peut prolonger, déterminer $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1}$. Que peut-on en déduire ?
4. Étude de f_0.
   (a) Montrer que $f_0'(x) = \dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2} g_0(x)$, où g_0 est une fonction (pas spécialement simple) à préciser.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f_0 (il faudra redériver g_0).
   (c) Tracer une allure de la courbe représentative de f_0.
5. Étudier le plus complètement possible la fonction f_1.