AP n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 décembre 2015

Exercice 1 : un peu de calcul sur les suites

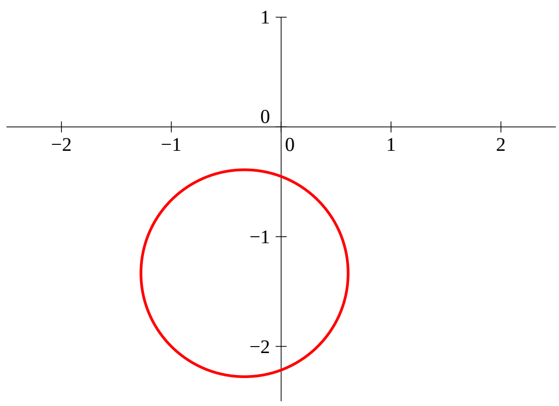
1. La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 2 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 8 = -4$, il y a donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On peut alors affirmer qu'il existe deux constantes A et B telles que $u_n = \left(A\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$. Les conditions initiales se traduisent par $u_0 = A = 1$, et $u_1 = \left(A\dfrac{\sqrt{2}}{2} + B\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \sqrt{2} = A + B = 3$, donc $B = 2$. On peut conclure : $u_n = \left(\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$.
2. Cette suite-là n'est pas récurrente linéaire d'ordre 2, mais elle peut le devenir ! Tous les termes de la suite étant strictement positifs (récurrence double triviale), on peut appliquer un coup de ln autour de la relation de récurrence, pour obtenir $\ln(u_{n+2}) = \dfrac{1}{2}(9\ln(u_{n+1}) - 4\ln(u_n))$. En posant $v_n = \ln(u_n)$, on a donc $v_{n+1} = \dfrac{9}{2}v_{n+1} - 2v_n$. Cette fois, on a bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{9}{2}x + 2 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \dfrac{81}{4} - 8 = \dfrac{49}{4}$, et on a deux racines réelles $r_1 = \dfrac{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}}{2} = 4$ et $r_2 = \dfrac{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$. On peut donc écrire $v_n = A.4^n + \dfrac{B}{2^n}$. Les conditions initiales donnent $v_0 = \ln(1) = 0 = A + B$, et $v_1 = \ln(2) = 4A + \dfrac{B}{2}$. On en déduit $A = \dfrac{2\ln(2)}{7}$ et $B = -\dfrac{2\ln(2)}{7}$. Conclusion : $v_n = \dfrac{2\ln(2)}{7} \times 4^n - \dfrac{2\ln(2)}{7.2^n}$, d'où $u_n = e^{v_n} = 2^{\frac{2}{7}(4^n - \frac{1}{2^n})}$.
3. On va essayer d'appliquer le théorème de convergence monotone. Les premiers termes de la suite sont $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{7}{12}$ et $u_3 = \dfrac{37}{60}$, ce qui laisse penser que la suite est croissante. Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$. La suite est donc bien croissante. Il reste à la majorer : u_n est une somme de n termes dont le plus grand est égal à $\dfrac{1}{n+1}$ (le premier de la somme), donc $u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1} < 1$. La suite étant croissante et majorée, elle converge (mais on ne sait pas vers quoi).
4. Il faut penser à appliquer le théorème des gendarmes. On sait que $kx - 1 < \mathrm{Ent}(kx) \leqslant kx$, donc $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$. Or, on sait bien que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx = x\sum_{k=1}^{n} k = \frac{xn(n+1)}{2}$, donc $\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2} - n\right) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$, soit $\dfrac{n-1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{2n}$. Les deux membres

extrêmes ont la même limite égale à $\frac{1}{2}$, on peut en déduire grâce au théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

5. Commençons par déterminer la monotonie des deux suites. On calcule $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) = \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} > 0$ puisque $2\sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante. Enfin, on a $u_n - v_n = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = -\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, qui a une limite nulle (on a usé et abusé de multiplications par la quantité conjuguée pour faire passer les racines carrées au dénominateur). Les deux suites sont donc bien adjacentes, et ont une limite commune l. De plus, on aura, quel que soit l'entier naturel n, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$ (les inégalités sont même strictes). On calcule $u_1 = 1 - 2\sqrt{2}$ et $v_1 = -1$ (il y a une coquille dans l'énoncé), d'où l'encadrement demandé. Comme on sait que $|u_n - l| \leqslant v_n - u_n$, il suffit d'avoir $v_n - u_n = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leqslant 10^{-2}$, soit $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \geqslant 200$. Cela sera vrai a fortiori si $2\sqrt{n} \geqslant 200$, soit $\sqrt{n} \geqslant 100$ ou encore $n \geqslant 10\ 000$. Eh oui, la convergence des deux suites est très lente !

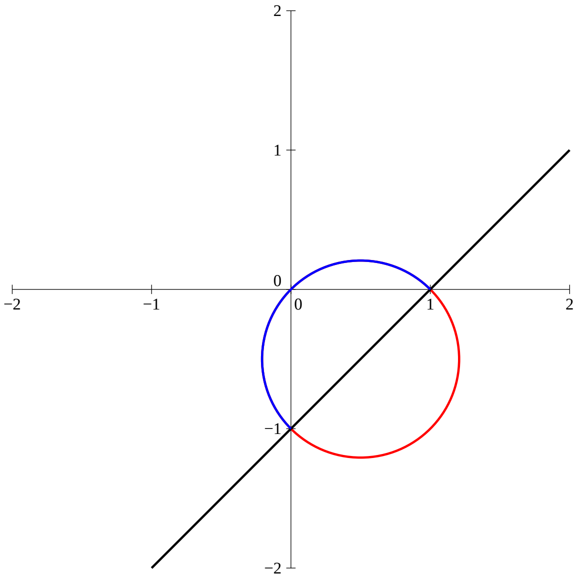
Complexes : fourre-tout

1. Soyons joyeusement bourrins en posant $z = a + ib$, et en élevant tout au carré (on peut, tout est positif) : $|z-1|^2 = 4|z+i|^2$, soit $|(a-1)+ib|^2 = 4|a+i(1+b)|^2$, donc $(a-1)^2 + b^2 = 4(a^2 + (1+b)^2)$. On développe joyeusement (j'inverse les deux membres) : $4a^2 + 4b^2 + 8b + 4 = a^2 + b^2 - 2a + 1$, donc $3a^2 + 3b^2 + 2a + 8b + 3 = 0$. Quitte à tout diviser par trois, on reconnait une équation de cercle qu'on va factoriser : $a^2 + b^2 + \frac{2}{3}a + \frac{8}{3}b + 1 = 0$, soit $\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \left(b + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + 1 = 0$, ou encore $\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$. On reconnait le cercle de centre $A\left(-\frac{1}{3} - \frac{4}{3}i\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Un petit dessin pour illustrer :



2. On peut traduire simplement la condition par $\frac{z-1}{z+i} \in i\mathbb{R}^+$, soit $(z-1)(\overline{z+i}) \in i\mathbb{R}^+$ (attention, c'est modulo 2π, donc la partie imaginaire devra être positive). Bourrinons en posant $z = a+ib$, alors $(z-1)(\overline{z+i}) = (a-1+ib)(a-i(b+1)) = a^2 - a + b^2 + b + i(ab - ab - a + b + 1)$. La

condition est donc vérifiée si, d'une part, $a^2-a+b^2+b=0$, soit $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=0$, on reconnait l'équation du cercle de centre $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; et d'autre part si $b+1-a\geqslant 0$, soit $b\geqslant a-1$, ce qui signifie que notre point doit être situé au-dessus de la droite d'équation $y=x-1$ dans le plan complexe. Encore une illustration (seule la moitié de cercle surlignée en bleu est solution du problème) :



3. On peut déjà remplacer $|\bar{z}|$ par $|z|$ dans les égalités, c'est la même chose. On se retrouve donc en particulier avec la condition $|z|^2=|z|$, ce qui implique manifestement $|z|=1$ (ou $z=0$, mais cette valeur n'est pas solution de toute façon). On peut donc poser $z=e^{i\theta}$, et il reste simplement à vérifier la condition $|1-z|=1$. Or, $|1-e^{i\theta}|=|e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}})|=|e^{i\frac{\theta}{2}}\times(-2i\sin\frac{\theta}{2})|=2\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|$. On se retrouve donc avec $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{\theta}{2}=\pm\dfrac{\pi}{6}$, ou $\dfrac{\theta}{2}=\pm\dfrac{5\pi}{6}$. Modulo 2π, on a donc les valeurs possibles pour l'angle : $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ou $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$. Les deux seules solutions du problème sont donc $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=e^{-i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
4. (a) On commence par poser $Z=z^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2-(3+8i)Z-16+12i=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta=(3+8i)^2+4(16-12i)=9+48i-64+64-48i=9$. C'est sympa, pas besoin de gros calculs pour obtenir $Z_1=\dfrac{3+8i-3}{2}=4i$ et $Z_2=\dfrac{3+8i+3}{2}=3+4i$. Il ne reste plus qu'à chercher les racines carrées de ces deux valeurs. Pour Z_1, on n'est pas obligés d'utiliser la méthode habituelle, on peut écrire $4i=4e^{i\frac{\pi}{2}}$, et en déduire que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, et $z_2=-z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. Par contre, pour Z_2, on va revenir à la méthode habituelle en posant $z=a+ib$ et en écrivant $z^2=3+4i$. En développant $(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab$, on obtient les deux conditions $a^2-b^2=3$ et $2ab=4$, et on rajoute comme d'habitude la condition sur le module : $|z|^2=a^2+b^2=|3+4i|=\sqrt{9+16}=5$. En additionnant et en soustrayant les équations extrêmes, on trouve $2a^2=8$, soit $a=\pm 2$, et $2b^2=2$, soit $b=\pm 1$. Les réels a et b devant être de même signe à cause de la condition $2ab=4$, on trouve donc les deux solutions $z_3=2+i$ et $z_4=-2-i$. L'équation initiale a donc quatre solutions comme prévu.
   (b) Deux possibilités pour simplifier cette équation de degré 3 : soit on se rend compte que $z=-i$ est racine évidente, soit on ne s'en rend pas compte mais on sait factoriser : $z^3-i=z^3-(-i)^3=(z+i)(z^2-iz-1)$, l'équation dévient alors $(z+i)(z^2-iz-7)=0$. La deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta=-1+28=27$, et admet donc pour

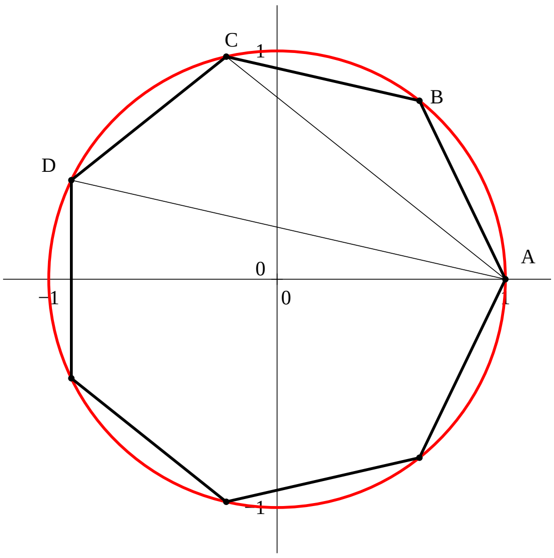
racines $z_1 = \dfrac{i+3\sqrt{3}}{2}$, et $z_2 = \dfrac{i-3\sqrt{3}}{2}$. Il y a donc trois solutions à l'équation : $-i$, $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

(c) Cette équation revient à dire que $z^4 = 2\,\mathrm{Re}(z)$. En particulier, z^4 est un nombre réel, ce qui implique $\arg(z^4) \equiv 0[\pi]$, donc $4\arg(z) \equiv 0[\pi]$, et $z \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$. Distinguons plusieurs cas, en commençant par $z = a \in \mathbb{R}$, l'équation devient alors $a^4 = 2a$, soit $a(a^3-2) = 0$, ce qui nous donne comme premières solutions $a = 0$ et $a = \sqrt[3]{2}$. Passons maintenant au cas où $z = bi \in i\mathbb{R}$, ce qui nous ramène à l'équation $b^4 = 0$, qui n'a donc pas d'autre solution que $z = 0$ qu'on avait déjà obtenue. Cas suivant, quand $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = c(1+i) = c+ci$, avec $c \in \mathbb{R}$. On a alors $z^4 = c^4(1+i)^4 = c^4(2i)^2 = -4c^4$. On est donc ramenés à l'équation $-4c^4 = 2c$, soit $2c(1+2c^3) = 0$. On retrouve encore une fois la solution nulle, ainsi que $c = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, soit encore $z = \dfrac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}$. Dernier cas pour la route : si $\arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = d(1-i)$. On trouve alors $z^4 = d^4(1-i)^4 = d^4(-2i)^2 = -4d^4$. Même conclusion que tout à l'heure, on trouve $z = \dfrac{-1+i}{\sqrt[3]{2}}$. On a fini le tour, il y a donc quatre solutions au total.

5. Si on note z l'affixe d'un point du plan, et z' l'affixe de son image par la rotation r, alors $z' - i = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-i)$, et $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)(z-i) + i = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}i$, ce qu'on notera de façon légèrement abusive $r(z) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}i$. De même, on aura $r'(z) = -i(z-1)+1 = -iz+i+1$. On peut alors calculer $r \circ r'(z) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)(-iz+i+1) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}i = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$. Sans surprise, notre isométrie est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ (la somme des angles de r et de r'). Il ne reste plus qu'à déterminer son centre, qui est le point fixe de l'application : $r \circ r'(z) = z$ donne $z - \dfrac{1}{2}z + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$, soit en multipliant partout par 2, $z = \dfrac{\sqrt{3}+3i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}+3i)(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

6. Supposons donc que le triangle ABC est équilatéral direct (s'il est indirect, la formule finale est légèrement modifiée, il y a une imprécision dans l'énoncé), et notons $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Profitons-en pour rappeler que ce nombre est une racine cubique de l'unité, et qu'on a donc $j^3 = 1$, ainsi que $1 + j + j^2 = 0$. Le triangle est donc équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$, ou encore $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + a(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) = 0$. Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{-2i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, et $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = j$. On trouve donc la première condition équivalente $c + j^2b + aj = 0$. Bien entendu, en multipliant par j ou j^2, on trouve les conditions symétriques $jc + b + j^2a = 0$ et $j^2c + jb + a = 0$ (en utilisant que $j^3 = 1$). Si le triangle est équilatéral indirect, on aurait de même les conditions $a + jc + j^2b = ja + j^2c + b = j^2a + c + jb = 0$.

7. Il suffit de prouver la formule pour un heptagone régulier particulier, et elle sera vraie pour tous les autres (au pire, toutes les distances seront multipliées par une même constante, ce qui ne change rien). Tant qu'à faire, prenons un heptagone régulier qu'on connait bien, celui formé par les racines septièmes de l'unité dans le plan complexe. Quitte à décider de renommer les points, on peut choisir $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $z_C = e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $z_D = e^{i\frac{6\pi}{7}}$:



Il ne reste plus qu'à calculer les distances, par exemple $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\frac{2\pi}{7}-1}|$. C'est une occasion rêvées de factoriser par l'angle moitié : $AB = |e^{i\frac{\pi}{7}}(e^{i\frac{\pi}{7}} - e^{-i\frac{\pi}{7}})| = |e^{i\frac{\pi}{7}}| \times \left|2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ (qui est évidemment positif). Le même calcul donnera $AC = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $AD \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$. En mettant tout au même dénominateur, prouver que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ revient alors à prouver que $AC \times AD - AB \times AD - AB \times AC = 0$, soit $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 0$. Utilisons joyeusement des transformations somme-produit (en multipliant tout par 2 et en transformant les angles négatifs en leur opposés par parité du cosinus) pour transformer le membre de gauche en $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = 0$. Ah ben ça marche !