

AP : Séance n°5

PTSI B Lycée Eiffel

6 janvier 2017

Exercice 1 : un peu de calcul sur les suites

1. On définit une suite (u_n) par les conditions $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Calculer u_n en fonction de n .
2. On définit une suite (u_n) par les conditions $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{\frac{u_{n+1}^9}{u_n^4}}$. Calculer u_n en fonction de n .
3. Déterminer la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ (on ne demande pas la valeur de la limite éventuelle ; on pourra par contre calculer les premiers termes de la suite pour voir un peu ce qui se passe).
4. On définit une suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Ent}(kx)$ (où x est un réel non nul fixé). Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.
5. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. Montrer que les deux suites sont adjacentes. On note l leur limite commune. Montrer que $1 - 2\sqrt{2} \leq l \leq 1$, puis déterminer une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

Complexes : fourre-tout

Toutes les questions forment des petits exercices indépendants.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe pour lesquels $\left| \frac{z-1}{z+i} \right| = 2$.
2. Idem pour la condition $\arg \left(\frac{z-1}{z+i} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
3. Idem pour la condition $|z^2| = |1-z| = |\bar{z}|$.
4. Résoudre les équations suivantes :
 - (a) $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
 - (b) $z^3 - i = 6(z+i)$.
 - (c) $z^4 = z + \bar{z}$.
5. A et B sont les points d'affixes respectives i et 1 . On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$, r' la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer une équation de $r \circ r'$, et reconnaître l'isométrie correspondante.
6. Soient A , B et C trois points d'affixes respectives a , b et c , montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ (où $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$).
7. Soit $ABCDEFG$ un heptagone régulier, montrer que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.