

# AP n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 octobre 2016

## Trigonométrie

1. Comme on sait que  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  quel que soit la valeur de  $x$ , on a toujours  $0 \leq \frac{1 + \sin(x)}{2} \leq 1$ . Le même encadrement reste valable pour la racine carrée de cette expression (qui est toujours définie), et l'arccos est donc toujours défini. Autrement dit,  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ . La fonction sin étant impaire,  $f$  n'a pas de parité notable (à cause du +1 au numérateur de la fraction). Elle est par contre  $2\pi$ -périodique. On peut donc restreindre l'étude de  $f$  à l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

2. Sur l'intervalle proposé, la fonction sin est strictement croissante, donc ce qui se trouve dans la racine carrée aussi. On compose ensuite par une fonction strictement croissante (la racine carrée), puis par une fonction strictement décroissante (la fonction arccos), on aura globalement une fonction strictement décroissante, donc bijective (elle est bien sûr continue). Il reste alors à calculer  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \arccos(\sqrt{0}) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ , et  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arccos(\sqrt{1}) = \arccos(1) = 0$ . La fonction  $f$  est donc bijective de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Pour obtenir la réciproque  $g$ , on

part de  $f(x) = y$ , soit  $\arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}\right) = y$ , pour obtenir  $\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} = \cos(y)$  (aucun problème pour simplifier sur l'intervalle choisi), puis  $\frac{1 + \sin(x)}{2} = \cos^2(y)$ , et  $\sin(x) = 2\cos^2(y) - 1$ . Le membre de droite étant toujours compris entre  $-1$  et  $1$  (il vaut mieux, sinon la fonction  $f$  ne pourrait pas être bijective), et l'intervalle de travail étant  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , on peut en déduire que  $x = \arcsin(2\cos^2(y) - 1)$ , soit  $g(y) = \arcsin(\cos(2y))$  en reconnaissant une formule de duplication. On peut encore simplifier mais comme on va le faire à la question suivante, pas besoin de se fatiguer ici.

3. La fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $x$  si  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , car on a alors soit la racine carrée qui s'annule, soit ce qui se trouve sous l'arccos qui vaut 1. Le reste du temps, notons  $u(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}$ , et commençons par calculer  $u'(x) = \frac{\frac{\cos(x)}{2}}{2\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}} = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{2(1 + \sin(x))}}$ . Ensuite,

$$f(x) = \arccos(u(x)), \text{ donc } f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = \frac{-\cos(x)}{2\sqrt{2(1 + \sin(x))}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1 + \sin(x)}{2}}} =$$
$$\frac{-\cos(x)}{2\sqrt{(1 + \sin(x))}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)}} = -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{(1 + \sin(x))(1 - \sin(x))}} = -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\cos^2(x)}} =$$
$$-\frac{\cos(x)}{2|\cos(x)|}. \text{ Cette dérivée vaut donc simplement } -\frac{1}{2} \text{ sur tous les intervalles où le cosinus}$$

prend des valeurs positives, et  $\frac{1}{2}$  quand le cosinus prend des valeurs négatives. Sur l'intervalle  $I$ , on est dans le cas où  $f'(x) = -\frac{1}{2}$  (on sait que  $f$  est décroissante sur cet intervalle), donc

$f(x) = -\frac{1}{2}x + k$ . Comme  $f(0) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ , on en déduit que

$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$  sur cet intervalle.

4. Si  $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ , alors  $x = \frac{\pi}{2} - 2y$ , donc  $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2x$ .

5. Notons  $a = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ . Le plus simple est de commencer par utiliser les formules de duplication de la tangente pour écrire  $\tan(x) = \tan\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \frac{2a}{1-a^2}$ . Ensuite, on peut exploiter le

fait que  $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$  (grâce aux deux formules pour la dérivée de la tangente),

donc  $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\frac{4a^2}{(1-a^2)^2}} = \frac{(1-a^2)^2}{1-2a^2+a^4+4a^2} = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$ , ce qui donne  $\cos(x) =$

$\frac{1-a^2}{1+a^2}$  (le lecteur vérifiera lui-même que le signe obtenu pour le cosinus est toujours le bon).

Enfin,  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = \frac{(1+a^2)^2 - (1-a^2)^2}{(1+a^2)^2} = \frac{4a^4}{(1+a^2)^2}$ , ce qui donne  $\sin(x) =$

$\frac{2a}{1+a^2}$  (même remarque au-dessus pour les signes). On peut donc écrire, en reprenant les

notations des questions précédentes, que  $u(x) = \sqrt{\frac{1+\frac{2a}{1+a^2}}{2}} = \sqrt{\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

Or,  $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  (qui est toujours positif sur notre intervalle), donc

$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+a)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$  (on n'oublie pas ce que vaut  $a$ !).

Comme on est particulièrement inspirés, on se rend compte que  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et

on reconnaît une formule d'addition de cosinus, ce qui prouve que  $u(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ , ce

qui prouve bien que  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ .

## Injections et surjections

1. Le dénominateur de la fraction définissant  $f$  s'annule lorsque  $x^2 = 1$ , donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

2. La fonction  $f$  est dérivable sur son domaine de définition, et  $f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x \times 2x^2}{(x^2-1)^2} =$

$\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ . Elle est donc strictement croissante sur  $] -\infty; -1[$  et sur  $] -1; 0]$  et strictement

décroissante sur  $[0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ . Notons au passage que  $f$  est une fonction paire, ce qui explique la symétrie des variations ainsi que celles des limites que nous allons désormais

calculer. En gardant les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ . Le trinome  $x^2 - 1$  étant positif en-dehors de ses racines  $-1$  et  $1$ , on a facilement  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ . On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f$	$2$	$+\infty$	$0$	$2$	$2$

Le tableau ci-dessus illustre les variations de la fonction  $f$ . Les flèches indiquent que  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; -1[$  et  $] -1; 0]$ , et strictement décroissante sur  $[0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ . Les limites aux bornes du domaine de définition sont indiquées par  $+\infty$  et  $-\infty$ .

3. La fonction ne peut évidemment pas être injective si elle est paire. Par exemple,  $f(-2) = f(2) = \frac{8}{3}$ . Elle n'est pas non plus surjective puisque le tableau de variations montre clairement que les valeurs comprises entre 0 (strictement) et 2 ne sont jamais atteintes. Pour rendre la fonction bijective, le plus simple est de modifier d'abord l'ensemble d'arrivée : d'après la remarque précédente, en posant  $J = ]-\infty; 0] \cup ]2, +\infty[$ ,  $f$  devient surjective de  $\mathbb{R}$  vers  $J$ . Reste maintenant à modifier l'ensemble de départ pour rendre  $f$  injective. Pour cela, il suffit de restreindre  $f$  à un ensemble sur lequel elle ne prend pas deux fois la même valeur. L'ensemble  $I = [0; 1[ \cup ]1, +\infty[$  convient. La fonction  $f$  effectue donc une bijection de  $[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  vers  $] - \infty; 0] \cup ]2; +\infty[$ .
4. Pour voir si  $f$  est injective, considérons deux réels  $x$  et  $x'$  tels que  $f(x) = f(x')$ , et cherchons à savoir si  $x = x'$ . Supposons donc  $\frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2x'^2}{x'^2 - 1}$ , ce qui donne  $2x^2(x'^2 - 1) = 2x'^2(x^2 - 1)$  puis  $-2x^2 = -2x'^2$ . Ceci n'implique pas que  $x = x'$  (on peut aussi avoir  $x = -x'$ ), la fonction n'est pas injective. En fait, on se rend facilement compte que  $f$  deviendra injective si on supprime la possibilité d'avoir  $x' = -x$ , ce qui sera le cas en restreignant  $f$  à  $\mathbb{R}^+ \cap \mathcal{D}_f$ .
5. Pour la surjectivité, cherchons les antécédents d'un réel quelconque  $y$ , et partons donc de l'équation  $f(x) = y$ , c'est-à-dire  $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ . Cela implique  $yx^2 - y = 2x^2$ , soit  $x^2(y - 2) = y$ , ou encore  $x^2 = \frac{y}{y - 2}$ . Cette équation n'admet pas toujours de solution (manifestement,  $y = 2$  pose de gros problèmes), donc  $f$  ne peut pas être surjective. Plus précisément,  $y$  n'aura aucun antécédent par  $f$  si  $\frac{y}{y - 2}$  n'est pas positif, c'est-à-dire lorsque  $y \in ]0; 2]$  (on retrouve le résultat des premières questions). Si  $y \in \mathbb{R} \setminus \{]0; 2]\}$ ,  $y$  admet deux antécédents par  $f$ , l'un positif et l'un négatif (un seul dans le cas très particulier où  $y = 0$ ). Pour rendre  $f$  bijective, il suffit donc d'imposer la valeur positive pour l'antécédent, c'est-à-dire la solution  $x = \sqrt{\frac{y}{y - 2}}$  à l'équation précédente. Cela revient exactement à dire que la fonction réciproque de  $f$ , définie sur  $] - \infty; 0] \cup ]2, +\infty[$  et à valeurs dans  $[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ , est donnée par  $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$ .

## Calculs d'intégrales

- Ici, intégration directe en reconnaissant une forme  $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$  (quitte à multiplier en haut et en bas par 2), donc  $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = [\sqrt{1 + t^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$ .
- Pour se débarrasser de la valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qui se trouve à l'intérieur :  $x^2 - x - 2$  s'annule pour  $x = -1$  et  $x = 2$  (qui n'appartient pas à notre intervalle d'intégration) et le trinôme est négatif entre  $-1$  et  $2$ . On peut donc, via la relation de Chasles, écrire  $\int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-3}^{-1} x^2 - x - 2 dx + \int_{-1}^0 -x^2 + x + 2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-1} + \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 9 + \frac{9}{2} - 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{59}{6}$ .
- Un cas classique de double IPP : on pose d'abord  $u(x) = x^2$ , donc  $u'(x) = 2x$ , et  $v'(x) = v(x) = e^x$  pour obtenir (en notant  $I$  l'intégrale qu'on cherche à calculer)  $I = [x^2 e^x]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} 2x e^x dx = 2 \ln^2(2) - 2 \int_0^{\ln(2)} x e^x dx$ . On refait une IPP sur cette intégrale en posant toujours  $v'(x) = v(x) = e^x$ , et  $u(x) = x$ , donc  $u'(x) = 1$ . On trouve alors  $I = 2 \ln^2(2) - 2[xe^x]_0^{\ln(2)} + 2 \int_0^{\ln(2)} e^x dx = 2 \ln^2(2) - 4 \ln(2) + 2[e^x]_0^{\ln(2)} = 2 \ln^2(2) - 4 \ln(2) + 4 - 2 = 2(\ln^2(2) - 2 \ln(2) + 1)$ .

- Encore un cas où une IPP est ce qu'il y a de mieux. On pose  $u(t) = t + 1$ , donc  $u'(t) = 1$ , et  $v'(t) = \operatorname{ch}(t)$ , dont  $v(t) = \operatorname{sh}(t)$ , pour obtenir  $\int_0^2 (t+1) \operatorname{ch}(t) dt = [(t+1) \operatorname{sh}(t)]_0^2 - \int_0^2 \operatorname{sh}(t) dt = 3 \operatorname{sh}(2) - [\operatorname{ch}(t)]_0^2 = 3 \operatorname{sh}(2) - \operatorname{ch}(2) + 1$  (qu'on peut tenter de simplifier, mais ça n'a pas grand intérêt).
- Un cas d'IPP plus subtil : on pose  $u(t) = \ln(1 + t^2)$ , donc  $u'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$ , et  $v'(t) = 1$  pour obtenir  $v(t) = t$ . On en déduit que  $\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt = \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt$ . La dernière intégrale peut se calculer directement en constantant que  $\frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} = 1 - \frac{1}{1 + t^2}$ . En notant  $I$  l'intégrale à calculer, on a donc  $I = \ln(2) - 2 \int_0^1 1 - \frac{1}{1 + t^2} dt = \ln(2) - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$ .
- Ce calcul serait vicieux sans l'indication, mais là c'est plus facile :  $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$ , ou si on préfère  $\cos(x) + 1 = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ . On en déduit que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ .
- Puisqu'on nous le suggère si gentiment, posons donc  $t = \sin(x)$ . Mais cela pose un léger problème au niveau des bornes, qui est du au fait que  $\sin$  n'est pas vraiment bijective sur  $[0, \pi]$ . Séparons donc l'intégrale en deux, et calculons  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$ . On peut poser  $t = \sin(x)$ , les bornes deviennent  $\sin(0) = 0$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , et  $dt = \cos(x) dx$ , ce qui tombe très bien puisque cette expression apparait dans l'intégrale  $I$ . On a donc  $I = \int_0^1 \frac{1}{1 + t} dt = [\ln(1 + t)]_0^1 = \ln(2)$ . Si on note  $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$ , le même changement de variable donne  $J = \int_1^0 \frac{1}{1 + t} dt = -\ln(2)$ . Autrement dit, l'intégrale initiale est bêtement nulle.
- Le changement de variable est ici complètement facultatif puisqu'on reconnaît une forme  $\frac{u'}{u}$ , mais faisons-le quand même pour nous entraîner :  $t = e^x$ , donc  $dt = e^x dx$ , et les bornes deviennent 1 et  $e$ , soit  $\int_0^1 \frac{e^x}{2 + e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{2 + t} dt = [\ln(2 + t)]_1^e = \ln(e + 2) - \ln(3)$ .
- Faisons donc ce qui nous est proposé :  $t = \sqrt{x}$ , les bornes deviennent 1 et  $\sqrt{2}$ , et  $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ , donc  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{1 + t^2} dt = [2 \arctan(t)]_1^{\sqrt{2}} = 2 \arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}$  (non, ça ne se calcule pas mieux que ça!).
- Posons donc  $g(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$ , et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (par exemple). Par définition, on a alors  $F(x) = G\left(\frac{1}{x}\right) - G(x)$ , donc  $F'(x) = -\frac{1}{x^2} G'\left(\frac{1}{x}\right) - G'(x)$  (dérivée d'une composée), soit  $F'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - \frac{\arctan(x)}{x} = -\frac{1}{x} \left( \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ . Bon, comme on n'a jamais vu ça en cours, posons maintenant  $h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ , et essayons de calculer  $h(x)$  en dérivant :  $h'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$ .

La fonction  $h$  est donc constante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , égale à  $h(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ . On en déduit que  $F'(x) = -\frac{\pi}{2x}$ , donc  $F(x) = -\frac{\pi}{2} \ln(x) + k$ , avec  $k$  une constante réelle. Or, on sait que  $F(1) = 0$  (reprenez la définition de  $F$ ) donc  $k = 0$  et  $F(x) = -\frac{\pi}{2} \ln(x)$ .