Devoir Maison n°5

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 17 novembre 2013

Exercice 1

On considère dans tout ce problème la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On notera I la

matrice identité d'ordre 4.

1. Calculer A^2 .
2. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. Donner par la même occasion des formules de récurrence exprimant α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n .
4. Montrer que la suite (α_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, calculer α_n .
5. En déduire β_n puis l'expression de A^n .
6. On note B la matrice appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à -1 . Après avoir calculé B^2 et B^3 , conjecturer puis prouver l'expression de B^n .
7. Retrouver l'expression de A^n à l'aide des résultats de la question précédente et de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

On considère une matrice carrée d'ordre 3 notée $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. On note E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices vérifiant $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$. Dans le cas où $A \in E$, on notera $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note également I la matrice identité d'ordre 3, et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que I et J appartiennent à E , et déterminer les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.
2. Soit K la matrice définie par $K = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ -2 & 5 & 3 \\ x & -6 & 5 \end{pmatrix}$, où x et y sont deux réels. Déterminer les valeurs de x et y pour que K appartienne à E .
3. Soient A et B deux matrices de E , montrer que $AB \in E$ et que $s(AB) = s(A)s(B)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.
 - (a) Calculer AJ et JA .
 - (b) Montrer que A appartient à E si et seulement si $AJ = JA$.
 - (c) Vérifier que, si $A \in E$, alors $AJ = s(A)J$.
5. Soit A une matrice inversible de E . En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que $A^{-1} \in E$, que $s(A) \neq 0$, et exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.
6. Soit $A \in E$, on note $B = \frac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$. On note également $F = \{M \in E \mid s(M) = 0\}$.
 - (a) Montrer que B appartient à E .
 - (b) Calculer BC et CB .
 - (c) En déduire que, $\forall n \geq 1$, $(A - B)^n = A^n - B^n$.
 - (d) Montrer que toute matrice de E peut s'écrire comme somme d'une matrice de F et d'une matrice proportionnelle à J .