

Dénombrement

ECE3 Lycée Carnot

30 novembre 2011

Introduction

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main. Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un événement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

Quelques exemples de problèmes faisant intervenir les objets que nous allons étudier dans ce cours :

- La classe est constituée de 42 élèves qu'on veut répartir pour les colles en 14 groupes de 3 élèves. En oubliant les contraintes liées aux langues, combien de répartitions différentes peut-on créer (une répartition ne tient pas compte de la numérotation des groupes : deux répartitions contenant les mêmes groupes mais dans un ordre différent seront ainsi comptées comme une seule et même répartition) ?
- Il y a 42 élèves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi eux qui soient nés le même jour de l'année ?
- Le Loto est un jeu où on coche dans une grille sept numéros (on oublie les complications à base de numéros complémentaires) choisis entre 1 et 49. Combien de grilles différentes peut-on remplir ?

1 Cardinaux d'ensembles finis

Définition 1. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, pour un certain entier naturel n . Cet entier n est alors unique. Il est appelé **cardinal** de l'ensemble E , et on le note $\text{card}(E)$, ou $|E|$, ou encore $\#E$.

Remarque 1. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1; \dots; n\}$ est simplement une façon d'étiqueter les éléments de E avec les numéros $1, 2, \dots, n$.

Proposition 1. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensemble de E , alors F est un ensemble fini, et $|F| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Nous nous en tiendrons au point de vue intuitif. \square

Proposition 2. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F . De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1; \dots; n\}$. L'application $g \circ f : E \rightarrow \{1; \dots; n\}$ est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n . \square

Proposition 3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E . Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vous voulez une démonstration? Soit f une bijection de A dans $\{1; \dots; n\}$ et g une bijection de B dans $\{1; \dots; p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B . On peut alors construire une bijection h de $A \cup B$ vers $\{1; \dots; n + p\}$ en posant $\forall x \in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x) + p$ (intuitivement, cela revient à garder pour les éléments de A la numérotation donnée par l'application f , et à décaler pour les éléments de B la numérotation donnée par g , de façon à ne pas utiliser deux fois les mêmes numéros).

Une fois ce fait admis, constatons que $A \cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \cap B$. On a donc, en utilisant le résultat que nous venons de démontrer, $|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A \setminus B$ et de $A \cap B$, on a également $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$, ou encore $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$. De même, $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$, donc on obtient $|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. \square

Théorème 1. Formule du crible de Poincaré.

Soient A_1, A_2, \dots, A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E , alors

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Proposition 4. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n = 3$ et $n = 4$:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence. On se contentera de prouver la formule pour $n = 3$ en partant de la proposition précédente : $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap C \cap B \cap C|$, ce qui donne bien la formule annoncée. \square

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, 152 savent jouer au poker, 83 au tarot et 51 au bridge. De plus, 24 savent jouer à la fois au poker et au tarot, 14 au poker et au bridge, et 8 au tarot et au bridge. Enfin, 3 élèves maîtrisent les trois jeux de cartes. Le nombre d'élèves jouant aux cartes est alors de $152 + 83 + 51 - 24 - 14 - 8 + 3 = 237$. Ce genre de calcul peut être plus simple à effectuer en représentant les ensembles (sous forme de « patates ») et en reportant les cardinaux donnés par l'énoncé dans les différentes zones du schéma.

Proposition 5. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E , alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de \bar{A} , donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. \square

Proposition 6. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Démonstration. Pas de preuve rigoureuse pour celui-ci, simplement une idée de la façon dont ça marche. Soit n le cardinal de E , et e_1, e_2, \dots, e_n ses éléments, p le cardinal de F et f_1, \dots, f_p ses éléments. on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

	e_1	e_2	\dots	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	\dots	(e_n, f_1)
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	\dots	(e_n, f_p)

Il y a bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

2 Listes, arrangements et combinaisons

Définition 2. Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}$. Une **p -liste** d'éléments de E est simplement un élément de E^p .

Remarque 2. On peut très bien avoir plusieurs fois le même élément dans une p -liste. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p -liste est important.

Proposition 7. Le nombre de p -listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p .

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. □

Exemple : Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement avec remise trois boules dans cette urne. Le nombre total de tirages possibles est $10^3 = 1\,000$ (l'ordre est important, et on peut très bien tirer plusieurs fois le même chiffre puisqu'il y a remise ; il s'agit donc de listes).

Remarque 3. Le nombre de p -listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de l'ensemble $\{1; \dots; p\}$ vers cet ensemble. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1), f(2), \dots, f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E .

Définition 3. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p -liste d'éléments distincts de E .

Remarque 4. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

Définition 4. Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$, on note $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$.

Proposition 8. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $A_{n,p}$.

Démonstration. Contentons-nous de l'idée intuitive : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, \dots , $n-p+1$ pour le p ème, soit au total $n(n-1) \times (n-p+1) = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)(n-p) \dots 2 \times 1}{n(n-1) \dots 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$. □

Exemple : Dans la même urne que pour l'exemple concernant les listes, on tire toujours trois boules successivement, mais cette fois-ci sans remise. Le nombre de tirages possibles vaut maintenant $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

Remarque 5. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est également le nombre d'applications injectives de $\{1; \dots; p\}$ dans E .

Définition 5. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation**. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Exemple : Le nombre de façons d'asseoir 10 personnes autour d'une table à dix places est $10! = 3\,628\,800$.

Exemple : Le nombre d'anagrammes d'un mot (sans se limiter aux anagrammes ayant un sens) peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total des permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparaît k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par $3!$ car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\frac{12!}{3! \times 2! \times 2!}$.

Remarque 6. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre d'applications bijectives de cet ensemble dans lui-même.

Définition 6. Une **combinaison** de p éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à p éléments de E .

Définition 7. Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p le nombre $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. On le lit « p parmi n » (comme un raccourci signifiant le nombre de façons de choisir p objets parmi n objets au total).

Remarque 7. On pose souvent $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Proposition 9. Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparaît $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisque'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\frac{A_{n,p}}{p!} = \binom{n}{p}$. □

Exemple : Dans notre urne à 10 boules, on tire maintenant simultanément trois boules. L'ordre n'ayant plus d'importance, le nombre de tirages possibles est désormais

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120.$$

Remarque 8. On peut encore une fois interpréter ceci à l'aide d'applications : le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1; \dots; p\}$ dans E . En effet, se donner une application strictement croissante f est équivalent à se donner le sous-ensemble $\{f(1); f(2), \dots; f(p)\}$ (l'ordre étant imposé par la croissance de l'application).

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisations de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre n'est pas important	L'ordre est important
Répétitions possibles		Listes → puissances
Répétition interdites	Combinaisons → coefficients binômiaux	Arrangements → quotient de factorielles

3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 10. Quelques propriétés des factorielles, plus ou moins utiles :

- Par convention, $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = n! \times (n+1)$
- $\forall a > 1, a^n = o(n!),$ mais $n! = o(n^n)$. (Pour les plus curieux, je signale le joli résultat suivant, connu sous le nom de formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$)

Proposition 11. Quelques propriétés des coefficients binomiaux, utiles pour les calculs :

- $\forall n \geq 2, \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}; \binom{n}{n} = 1; \binom{n}{n-1} = n.$
- $\forall p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (propriété de symétrie).
- $\forall 1 \leq p \leq n, k \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$
- $\forall 1 \leq p \leq n, \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}$ (relation de Pascal).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1; \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$. Les deux derniers résultats découlent de la symétrie démontrée ce-dessous.

La propriété de symétrie est facile aussi : $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de p éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-p$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à p éléments et à $n-p$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour la troisième, $p \binom{n}{p} = \frac{p \times n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$, et $n \binom{n-1}{p-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$, les deux quantités sont bien égales.

Enfin, la formule de Pascal, qu'on peut démontrer de deux façons. Il y a d'abord le calcul bête et méchant : $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$
 $= \frac{(n-p) \times (n-1)! + p \times (n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$

On peut aussi utiliser une interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et x un élément fixé de E . Les sous-ensembles de E à p éléments, au nombre de $\binom{n}{p}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x , qui sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$ puisqu'il reste $p-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x , qui sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$ puisqu'il reste cette fois-ci p éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule. \square

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire :

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$
$n = 0$	1								
$n = 1$	1	1							
$n = 2$	1	2	1						
$n = 3$	1	3	3	1					
$n = 4$	1	4	6	4	1				
$n = 5$	1	5	10	10	5	1			
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n = 8$	1	8	28	56	56	56	28	7	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de ce dernier.

Théorème 2. Formule du binôme de Newton.

Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 9. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b - a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a + b)^6 = b^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + a^6$. L'ordre est inversé par rapport à l'ordre d'écriture habituel, mais la formule est de toute façon complètement symétrique.

Autre exemple : $(2 + \sqrt{3})^4 = (\sqrt{3})^4 + 4 \times 2 \times (\sqrt{3})^3 + 6 \times 2^2 \times (\sqrt{3})^2 + 4 \times 2^3 \times \sqrt{3} + 2^4 = 9 + 24\sqrt{3} + 72 + 32\sqrt{3} + 16 = 97 + 56\sqrt{3}$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n . Pour $n = 0$, la formule du binôme dit simplement que $(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons la formule

vraie au rang n , on a alors $(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ par hypothèse de récurrence, donc en développant le $a + b$ et en le faisant rentrer dans la somme, on obtient $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$. Effectuons un changement d'indice en remplaçant k par $k + 1$

dans la première somme (on ne touche à rien dans la deuxième) : $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} +$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$ (on a isolé un terme dans chaque somme pour pouvoir regrouper les sommes). Maintenant, on reconnaît la formule de

Pascal dans la somme, donc $(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$. Il ne reste plus qu'à remettre les deux termes isolés dans la somme pour obtenir la formule au rang $n + 1$, ce qu'on peut faire puisqu'ils sont justement égaux aux termes manquants pour $k = 0$ et $k = n + 1$. \square

Proposition 12. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n .

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E . Or, on sait que, pour tout entier k , il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ sous-ensembles.

Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a = b = 1$, donc elle vaut $(1 + 1)^n = 2^n$.

Une façon plus combinatoire de voir les choses : choisir un sous-ensemble A de l'ensemble E revient à choisir, pour chaque élément de E , si celui-ci appartient à A ou non. On a ainsi deux possibilités pour chaque élément de E , ce qui fait au total 2^n possibilités pour construire le sous-ensemble A . Autre façon de décrire les choses pour les plus formalistes d'entre vous : pour chaque sous-ensemble A de E , on définit une application $\chi_A : E \rightarrow \{0; 1\}$, telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ (cette application χ_A est appelée application caractéristique de l'ensemble A , car elle décrit les éléments appartenant à l'ensemble A). On peut prouver que toutes applications de E vers $\{0; 1\}$ sont des applications caractéristiques d'un sous-ensemble de E , et que deux sous-ensembles distincts de E ont des applications caractéristiques différentes. Autrement dit, il y a une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des applications de E dans $\{0; 1\}$. Or, comme on l'a vu plus haut (après la définition des p -listes), il y a 2^n applications de E dans $\{0; 1\}$. \square

Proposition 13. Formule de Vandermonde.

Soient a , b et n trois entiers naturels tels que $n \leq a + b$, alors
$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}.$$

Démonstration. On va passer par une interprétation combinatoire. Considérons un ensemble séparé en deux sous-ensembles disjoints A et B , pour lequel a éléments appartiennent à A et b éléments à B . L'ensemble contient donc au total $a + b$ éléments. On veut choisir un sous-ensemble de cardinal n dans cet ensemble. On sait déjà qu'il y a $\binom{a+b}{n}$ possibilités de faire ce choix (ce qui correspond au membre de gauche de notre inégalité). Mais on peut également classer les sous-ensembles à n éléments en catégories selon le nombre d'éléments de A qu'ils contiennent : soit 0 élément de A et donc n éléments de B (il y a $\binom{a}{0} \binom{b}{n}$ tels sous-ensembles), soit 1 élément de A et $n - 1$ éléments de B (il y a $\binom{a}{1} \binom{b}{n-1}$ tels sous-ensembles), etc, jusqu'à la possibilité d'avoir n éléments de A et 0 éléments de B (il y a $\binom{a}{n} \binom{b}{0}$ tels sous-ensembles). Le nombre total de sous-ensembles, déjà compté une première fois plus haut, vaut donc aussi
$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}.$$
 \square

Pour revenir aux trois exemples donnés dans l'introduction, les calculs à effectuer seraient les suivants :

- Pour constituer le premier trinôme, il faut choisir 3 élèves parmi les 42 élèves de la classe. Pour le deuxième, on choisit 3 élèves parmi les 39 restants, et ainsi de suite jusqu'à avoir à prendre 3 élèves parmi les 3 derniers pour le dernier trinôme (autant dire qu'on n'a plus le choix. Reste à diviser tous ces choix par $14!$, le nombre d'ordres différents possibles qu'on peut avoir sur les 14 trinômes, soit $\binom{42}{3} \times \binom{39}{3} \times \binom{36}{3} \times \binom{33}{3} \times \binom{30}{3} \times \binom{27}{3} \times \binom{24}{3} \times \binom{21}{3} \times \binom{18}{3} \times \binom{15}{3} \times \binom{12}{3} \times \binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} \times \frac{1}{14!}$ répartitions possibles. Si on écrit tout sous forme de quotient de factorielles, ça se simplifie beaucoup pour laisser $\frac{42!}{(3!)^{14} \times 14!}$ (qui est accessoirement un nombre gigantesque). On peut retrouver ce résultat directement : on choisit un ordre sur les 42 élèves (d'où le numérateur), puis on découpe la liste ordonnée de 42 élèves en 14 paquets de 3. L'ordre dans chacun des 14 paquets n'a aucune importance (on divise donc 14 fois de suite par $3!$) et l'ordre des 14 paquets n'a pas non plus d'importance, donc on divise encore par $14!$.
- Le nombre de choix possibles pour les 42 dates de naissance des élèves de la classe est 365^{42} puisqu'on a 365 dates possibles pour chaque élève. Si on ne veut **pas** de répétition (donc

des élèves tous nés à des dates distinctes), il n'y a plus que A_{365}^{42} , possibilités. Autrement dit, la probabilité que tous les élèves soient nés à des dates différentes vaut $\frac{A_{365}^{42}}{365^{42}} \sim 0.085$. La probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour vaut donc environ $1 - 0.085 = 0.915$. On a plus de neuf chances sur dix d'avoir deux anniversaires simultanés.

- C'est une application directe du cours, il y a $\binom{49}{7} = 85\,900\,584$ grilles différentes au Loto.