Corrigé du sujet HEC 2008

ECE3 Lycée Carnot

14 mai 2010

1. Appliquons donc dans la joie et la bonne humeur le pivot de Gauss à notre matrice R :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 6L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 - L_4 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/6 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice R est bien inversible, d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) C'est un calcul peu passionnant : $R^{-1}S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, puis $R^{-1}SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

   (b) Notons D la matrice diagonale calculée à la question précédente, et prouvons par récurrence que $S^n = RD^nR^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, car $S = R(R^{-1}SR)R^{-1} = RDR^{-1}$; en supposant la formule exacte au rang n, on a ensuite $S^{n+1} = S \times S^n = (RDR^{-1})(RD^nR^{-1}) = RD^{n+1}R^{-1}$. On en déduit donc que $S^n = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} R^{-1}$, soit

$$S^n = \begin{pmatrix} 9^n & 9^n - 5^n & 9^n - 5^n & 9^n \\ 0 & \frac{1+5^{n+1}}{6} & \frac{5^{n+1}-5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5^n-1}{6} & \frac{5^n+5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) L'énoncé était peut-être un peu ambigü sur la façon dont s'effectue la contamination : une personne saine au jour n qui se fait contaminer devient contagieuse au jour $n+1$, il n'y a que deux états possibles (et pas d'état « malade mais pas contagieux »). Du coup, si personne n'est contagieux au jour n (c'est ce que signifie $X_n = 0$), personne ne le sera au jour $n+1$ (puisque personne n'aura pu être contaminé), soit $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$, et $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (b) Si tout les individus sont contagieux au jour n (hypothèse $X_n = 3$), d'après l'énoncé, ils seront tous sains le jour $n+1$ donc $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 0) = 1$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (c) Si on suppose $X_n = 1$ réalisé, il y a donc un individu contagieux au jour n et deux individus sains. Chacun de ces deux individus a donc une probabilité $p = \dfrac{1}{3}$ de devenir contagieux, le nombre de personnes contaminées suivra donc bien une loi binômiale de paramètre $\left(2; \dfrac{1}{3}\right)$.

   Si $X_n = 2$, il y a cette fois-ci un seul individu sain (et donc suscptible d'être contaminé), donc X_{n+1} suivra une loi de Bernouilli. Reste à déterminer son paramètre, c'est-à-dire la probabilité que l'individu sain soit contaminé, sachant qu'il a deux possibilités de se faire contaminer puisqu'il y a deux malades. Autrement dit, la probabilité qu'il ne soit **pas** contaminé vaut $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. La loi de X_{n+1} sera donc bien binômiale de paramètre $\left(1; \dfrac{5}{9}\right)$.

   (d) D'après la question précédente, il s'agit simplement de calculer des espérances de lois binômiales, donc $E_{X_n=1}(X_{n+1}) = 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1}) = \dfrac{5}{9}$.

4. (a) On a donc la loi suivante pour X_0 : $P(X_0 = 0) = \dbinom{3}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$; $P(X_0 = 1) = \dbinom{3}{1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$; $P(X_0 = 2) = \dbinom{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \dfrac{2}{9}$ et $P(X_0 = 3) = \dbinom{3}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = \dfrac{1}{27}$. Les quatre évènements dont on vient de calculer les probabilités forment un système complet d'évènements, on peut appliquer (quatre fois) la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_1.

   Commençons par préciser les probabilités conditionnelles manquantes : au vu de la question *c*, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{4}{9}$; $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{5}{9}$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = 0$; et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \dbinom{2}{0} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$; $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \dbinom{2}{1} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$ et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{9}$.

   On a donc $P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0) \times P_{X_0=0}(X_1 = 0) + P(X_0 = 1) \times P_{X_0=1}(X_1 = 0) + P(X_0 = 2) \times P_{X_0=2}(X_1 = 0) + P(X_0 = 3) \times P_{X_0=3}(X_1 = 0) = \dfrac{8}{27} \times 1 + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{27} \times 1 = \dfrac{51}{81}$. De même, $P(X_1 = 1) = \dfrac{8}{27} \times 0 + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} \times \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{27} \times 0 = \dfrac{26}{81}$; $P(X_1 = 2) = \dfrac{8}{27} \times 0 + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} \times 0 + \dfrac{1}{27} \times 0 = \dfrac{4}{81}$, et $P(X_1 = 3) = 0$ (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles). Résumons tout cela dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X_1 = k)$	$\frac{51}{81}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{4}{81}$	0

D'où une espérance $E(X_1) = \dfrac{26 + 2 \times 4}{81} = \dfrac{34}{81}$.

(b) Calculons la somme en question en reprenant les résultats de la question 3.d) : $\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i) = 0 \times \dfrac{8}{27} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{5}{9} \times \dfrac{2}{9} + 0 \times \dfrac{1}{27} = \dfrac{34}{81}$, l'égalité est vérifiée.

5. (a) Les quatre évènements formant un système complet, on aura $u_n + v_n + w_n + t_n = 1$.

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=0) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=1) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} U_n,$$

c'est-à-dire que $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) On constate simplement que $M = \dfrac{1}{9}S$, donc $M^n = \dfrac{1}{9^n}S^n$.

(d) Une petit récurrence permet de prouver que $U_n = M^n U_0$ (en effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $U_{n+1} = MU_n = M(M^n U_0) = M^{n+1}U_0$), donc en effectuant le produit matriciel sur les deux premières lignes, $u_n = \dfrac{1}{9^n}(9^n u_0 + (9^n - 5^n)v_0 + (9^n - 5^n)w_0 + 9^n t_0) = u_0 + v_0 + w_0 + t_0 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) = 1 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0)$; et $v_n = \dfrac{1}{9^n}\left(\dfrac{1 + 5^{n+1}}{6}v_0 + \dfrac{5^{n+1} - 5}{6}w_0\right) = \dfrac{v_0 - 5w_0}{6 \times 9^n} + \dfrac{5^{n+1}(v_0 - w_0}{6 \times 9^n}$.

6. (a) Les évènements $(X_n = 0)$ forment une suite croissante d'évènements (puisque $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0$, dont l'union représente toutes loes situations où l'épidémie finira par être éradiquée (puisque, si $X_n = 0$, plus personne ne retombera malade).

(b) Il suffit de calculer, en utilisant le théorème de la limite monotone, la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. Au vu de la formule obtenue et du fait que $\dfrac{5}{9} \in]-1; 1[$, cette limite vaut 1 quelles que soient les valeurs de v_0 et w_0 (et a fortiori de u_0 et t_0 qui n'interviennent pas dans l'expression de u_n), ce qui signifie bien que le virus disparait presque sûrement, indépendamment de la loi de X_0.