Concours Blanc : corrigé

Lycée Carnot

6 janvier 2010

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

1 Exemples et généralités

1. Soit f une application surjective de $\{(1;2;3)\}$ dans $\{(1;2)\}$. Les triplets possibles pour $(f(1);f(2);f(3))$ sont $(1;1;2)$; $(1;2;1)$; $(1;2;2)$; $(2;1;1)$; $(2;1;2)$ et $(2;2;1)$, ce qui nous donne $S_{3,2} = 6$.
   De même, si g est une application surjective de $\{(1;2;3;4)\}$ dans $\{(1;2)\}$, les quadruplets possibles pour $(g(1);g(2);g(3);g(4))$ sont $(1;1;1;2)$; $(1;1;2;1)$; $(1;1;2;2)$; $(1;2;1;1)$; $(1;2;1;2)$; $(1;2;2;1)$; $(1;2;2;2)$; $(2;1;1;1)$; $(2;1;1;2)$; $(2;1;2;1)$; $(2;1;2;2)$; $(2;2;1;1)$; $(2;2;1;2)$ et $(2;2;2;1)$, d'où $S_{4,2} = 14$.
2. Une application ayant pour ensemble de départ $\{1;2;\dots;n\}$ ne peut prendre qu'au plus n valeurs différentes, donc ne pourra pas être surjective dans $\{1;2;\dots;p\}$ si $n < p$. Autrement dit, $S_{n,p} = 0$ dans ce cas.
3. La seule application ayant pour ensemble d'arrivée l'ensemble réduit à un seul élément $\{1\}$ est l'application constante égale à 1 (quel que soit l'ensemble de départ). Elle est par ailleurs surjective dès que $n \geqslant 1$, donc $S_{n,1} = 1$ pour $n \geqslant 1$.
4. Une application surjective de $\{1;2;\dots;n\}$ dans lui-même n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $\{1;2;\dots;n\}$, qui sont au nombre de $n!$, donc $S_{n,n} = n!$.

2 Détermination de $S_{n,2}$

1. On a vu plus haut que $S_{2,2} = 2! = 2$.
2. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2\}$, et supposons que $f(n+1) = 1$. Pour que f soit surjective, il suffit alors que la restriction de f à $\{1;2;\dots;n\}$ soit déjà surjective (u_n possibilités) ou que $f(1) = f(2) = \cdots = f(n) = 2$. Il y a de même u_n+1 applications surjectives pour lesquelles $f(n+1) = 2$, ce qui nous donne bien au total $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$.
3. La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe, $x = 2x+2$, a pour solution $x = -2$. Posons donc $v_n = u_n+2$, on a alors $v_{n+1} = u_{n+1}+2 = 2u_n+2+2 = 2(u_n+2) = 2v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et vérifiant $v_2 = u_2 + 2 = 4$. On en déduit que $\forall n \geqslant 2$, $v_n = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$, puis $u_n = v_n - 2 = 2^n - 2$.
4. Il y a au total 2^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2\}$. Parmi celles-ci, les seules qui ne sont pas surjectives sont les deux applications constantes respectivement égales à 1 et à 2. Le nombre d'applications surjectives est donc $2^n - 2$.

3 Détermination de $S_{n,3}$

1. Toujours en revenant à la dernière question de la première partie, $v_3 = S_{3,3} = 3! = 6$.
2. Soit g une application surjective de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ telle que $g(n+1) = 3$. Il y a alors deux possibilités pour la restriction de g à $\{1;2;\dots;n\}$: soit elle est surjective dans $\{1;2;3\}$, soit elle est surjective dans $\{1;2\}$ (sans prendre la valeur 3). Ces deux possibilités ne pouvant se

produire simultanément, il y a $v_n + u_n$ applications g convenables. Un raisonnement identique dans le cas où $g(n+1) = 1$ et $g(n+1) = 2$ nous permet d'obtenir au total $v_{n+1} = 3(v_n + u_n)$. Comme $u_n = 2^n - 2$, on a donc $v_{n+1} = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.

3. ```
   PROGRAM recurrence;
   USES wincrt;
   VAR i,n,v,w : integer;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de l'entier n >=3');
   ReadLn(n);
   v := 6; w := 3*8;
   FOR i := 4 TO n DO
   BEGIN
   v := 3*v+w-6; w := 2*w;
   END;
   WriteLn('La valeur de v_',n,' est de ',v);
   END.
   ```
4. D'après le résultat de la question 2, $w_{n+1} = v_{n+1} - 3 = 3v_n + 3 \times 2^n - 6 - 3 = 3(v_n - 3 + 2^n) = 3(w_n + 2^n)$.
5. Calculons $t_{n+1} = w_{n+1} + 3 \times 2^{n+1} = 3(w_n + 2^n + 2^{n+1}) = 3(w_n + 2^n + 2 \times 2^n) = 3(w_n + 3 \times 2^n) = 3t_n$. La suite (t_n) est donc bien géométrique de raison 3.
6. Il ne reste plus qu'à remonter : $t_3 = w_3 + 3 \times 2^3 = w_3 + 24 = v_3 - 3 + 24 = v_3 + 21 = 6 + 21 = 27$. On en déduit que $t_n = 27 \times 3^{n-3} = 3^n$, puis $w_n = 3^n - 3 \times 2^n$ et enfin $v_n = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.
7. Les applications de $\{1; 2; \dots n+1\}$ dans $\{1; 2; 3\}$ peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent : soit elle prennent les trois valeurs possibles, et il y a par définition v_n telles applications ; soit elles en prennent exactement deux, qu'on peut choisir de $\binom{3}{2} = 3$ façons différentes, et il y a à chaque fois u_n telles applications, donc $3u_n$ au total ; soit elles sont constantes, ce pour quoi on a 3 possibilités. Comme il y a un total de 3^n applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2; 3\}$, on obtient la relation $3^n = v_n + 3u_n + 3$, donc $v_n = 3^n - 3u_n - 3 = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.

4 Détermination de $S_{n+1,n}$

1. L'application f étant surjective, tout élément de $\{1; 2; \dots; n\}$ admet (au moins) un antécédent par f. Choisissons donc un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, cela nous donne n éléments de $\{1; 2. \dots; n+1\}$ ayant des images distinctes par f. Le dernier élément de $\{1; 2; \dots; n+1\}$ a une image identique à l'un des autres éléments de $\{1; 2; \dots; n+1\}$ (puisqu'on a déjà épuisé tous les éléments de l'ensemble d'arrivée), et cette image est bien l'unique élément de notre ensemble d'arrivée ayant exactement deux antécédents.
2. Il faut choisir deux éléments dans un ensemble en contenant $n+1$, il y a donc $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ possibilités.
3. Une fois choisis l'élément de l'ensemble d'arrivée ayant deux antécédents (n possibilités) et les deux antécédents en question, les $n-1$ éléments restants dans chaque ensemble sont reliés de façon bijective par f, ce qui laisse $(n-1)!$ possibilités. On a donc $S_{n+1,n} = n \times \frac{n(n+1)}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$.
   ```

5 Cas général

1. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2;\dots;p\}$. On a p choix possibles pour l'image de n par cette application, et la restriction de f à $\{1;2;\dots;n-1\}$ est soit surjective vers $\{1;2;\dots;p\}$ (il y a pour cela $S_{n-1,p}$ possibilités), soit elle prend toutes les valeurs sauf $f(n)$ (il y a pour cela $S_{n-1,p-1}$ possibilités). Cela nous donne bien la relation de récurrence $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
2.

$S_{n,p}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=0$	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0	0
$n=2$	0	1	2	0	0	0
$n=3$	0	1	6	6	0	0
$n=4$	0	1	14	36	24	0
$n=5$	0	1	30	150	240	120

3. Calculons séparément les membres de gauche et de droite : $\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{p!}{(p-k)!(k-j)!j!}$. De l'autre côté, $\binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}\frac{(p-j)!}{(k-j)!(p-k)!} = \frac{p!}{j!(k-j)!(p-k)!}$. Les deux membres sont bien égaux.
4. On a, en utilisant l'égalité précédente, $\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}$. Le premier coefficient binomial ne dépendant pas de k, on peut le sortir de la somme. On va par ailleurs effectuer le changement d'indice $j = k-q$ pour se ramener à $\binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}(-1)^{j+q}\binom{p-q}{j} = \binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}\binom{p-q}{j}1^j(-1)^{j+q}$. Comme $(-1)^{j+q} = (-1)^{j+q-2j} = (-1)^{q-j}$, on peut reconnaitre dans la somme une formule du binome de Newton égale à $(1-1)^{p-q} = 0$, d'où la nullité de la somme initiale.
5. Il faut choisir les j valeurs qui seront prises par notre application (il y a pour cela $\binom{p}{j}$ choix), et il reste ensuite à choisir une application surjective d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à j éléments, ce pour quoi on a par définition $S_{n,j}$ possibilités. Les applications prenant exactement j valeurs sont donc au nombre de $\binom{p}{j}S_{n,j}$.
6. Il y a au total p^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ vers $\{1;2;\dots;p\}$, et chacune d'elle prend un nombre de valeurs compris entre 1 et p. En sommant les expressions obtenues à la question précédente pour j variant de 1 à p, on obtiendra donc p^n (on ne compte manifestement pas deux fois une même application).
7. Tentons donc de calculer la somme de droite, en inversant la somme double qui apparait dès que possible :
$(-1)^p\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = (-1)^p\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\sum_{j=1}^{j=k}\binom{k}{j}S_{n,j} = (-1)^p\sum_{j=1}^{j=p}S_{n,j}\sum_{k=j}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{j}$
La somme de droite est justement celle dont on a montré qu'elle était nulle pour toutes les valeurs de j inférieures ou égales à $p-1$. Le seul terme restant est donc $(-1)^pS_{n,p}\sum_{k=p}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{p} = (-1)^{2p}S_{n,p} = S_{n,p}$. L'égalité demandée est donc prouvée.