Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n+3)^2}{16} \end{array}\right.$.

1. (a) La suite a l'air de décroître et de tendre vers 1.

   (b) Posons $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{16}$. f est strictement croissante sur $[-3;+\infty[$. Donc :

   $$\begin{array}{ccccc} & 1 & < & x & \leqslant & 5 \\ \Rightarrow & f(1) & < & f(x) & \leqslant & f(x) \\ \Rightarrow & 1 & < & f(x) & \leqslant & 4 \\ \Rightarrow & 1 & < & f(x) & \leqslant & 5 \end{array}$$

   Donc l'intervalle $]1;5]$ est stable par f. Or $u_0 \in]1;5]$.

   Donc pour tout n, $1 < u_n \leqslant 5$.

   (c) $f(x) - x = \dfrac{1}{16}(x^2 - 10x + 9)$ a pour racines 1 et 9, donc est strictement négatif pour $x \in]1;9[$.

   On vient de démontrer que pour tout n, $u_n \in]1;9[$, donc pour tout n on a $f(u_n) - u_n < 0$, soit $u_{n+1} < u_n$.

   Donc (u_n) est strictement décroissante.

2. (a)

$u_0 = 5$	$v_0 = 4$
$u_1 = 4$	$v_1 = 3$
$u_2 = \dfrac{49}{16} = 3{,}0625$	$v_2 = \dfrac{33}{16} = 2{,}0625$
$u_3 = \dfrac{9409}{4096} \simeq 2{,}29712$	$v_3 = \dfrac{5313}{4096} \simeq 1{,}29712$
$u_4 = \dfrac{470759809}{268435456} \simeq 1{,}753717$	$v_4 = \dfrac{202324353}{268435456} \simeq 0{,}753717$

   (b) On a $v_n = u_n - 1$, donc $u_n = v_n + 1$.

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

   $v_{n+1} = \dfrac{(u_n+3)^2}{16} - 1$

   $v_{n+1} = \dfrac{1}{16}(u_n^2 + 6u_n + 9 - 16)$

   $v_{n+1} = \dfrac{1}{16}((v_n+1)^2 + 6(v_n+1) - 7)$

   $v_{n+1} = \dfrac{1}{16}(v_n^2 + 2v_n + 1 + 6v_n + 6 - 7)$

   $v_{n+1} = \dfrac{1}{16}(v_n^2 + 8v_n + 0)$

   $v_{n+1} = \dfrac{1}{16}v_n(v_n+8)$

   (c) $v_0 = 4$; $v_1 = 3$; $v_2 = \dfrac{33}{16}$; $v_3 = \dfrac{5313}{4096}$; $v_4 = \dfrac{202324353}{268435456}$

   On retrouve bien les mêmes résultats que plus haut, donc le calcul est probablement juste.

   (d) Soit $g(x) = \dfrac{1}{16}x(x+8)$, g est strictement croissante sur $[-4;+\infty[$, donc :

   $$\begin{array}{ccccc} & 0 & < & x & \leqslant & 4 \\ \Rightarrow & g(0) & < & g(x) & \leqslant & g(4) \\ \Rightarrow & 0 & < & g(x) & \leqslant & 3 \\ \Rightarrow & 0 & < & g(x) & \leqslant & 4 \end{array}$$

   Donc $]0;4]$ est stable. Come $0 < v_0 \leqslant 4$, on a pour tout n, $0 < v_n \leqslant 4$.

   $g(x) - x = \dfrac{1}{16}(x^2 - 8x)$ a pour racines 0 et 8, donc $g(x) - x < 0$ pour $0 < x < 8$.

   Donc $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

   Donc (v_n) est strictement décroissante.

3. (a)

   $$\begin{array}{ccccc} & 0 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ \Rightarrow & 8 & \leqslant & x+8 & \leqslant & 12 \\ \Rightarrow & 8x & \leqslant & x(x+8) & \leqslant & 12x \\ \Rightarrow & \frac{1}{2}x & \leqslant & x(x+8) & \leqslant & \frac{3}{4} \end{array}.$$

   L'énoncé demande $\dfrac{1}{4}$ et on arrive à démontrer $\dfrac{1}{2}$, ce qui est mieux.

   (b) Pour préparer les questions suivantes, nous allons simplifier $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:

   $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{1}{16}v_n(v_n+8)}{v_n} = \dfrac{1}{16}(v_n+8)$

   Donc pour tout n, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{4}$.

   On sait déjà que (v_n) est toujours positive, donc (w_n) aussi.

   $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} v_{n+1}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n v_n} = \dfrac{4}{3}\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{4} = 1$

   Donc la suite (w_n) est décroissante.

   (c) Puisque (w_n) est décroissante, pour tout $n \geqslant 0$, $w_n \leqslant w_0$, soit $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n v_n \leqslant w_0$.

   $w_0 = v_0 = 4$, donc $v_n \leqslant 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ pour tout n.

   (d) On pose $x_n = 2^n v_n$, alors $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2^{n+1}v_{n+1}}{2^n v_n} = 2\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

   Donc (x_n) est croissante, donc $x_n \geqslant x_0$, soit $2^n v_n \geqslant 4$, d'où enfin $v_n \geqslant 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   Comme $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$, on a bien $v_n \geqslant 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ comme demandé.

   (e) On a démontré que pour tout n, $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant v_n \leqslant 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$

   Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   Et comme $u_n = v_n + 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. (a) Le coefficient directeur de T est la dérivée de la fonction en 1, donc $\dfrac{1}{2}$.

   Le coefficient directeur de (LU) est $\dfrac{3}{4}$.

   (b) Cf. graphique.

   (c) T a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

   $$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}((x+3)^2 - 8x - 8) = \frac{1}{16}(x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{16}(x-1)^2$$

   Le résultat est toujours positif, donc $\mathcal{C}$ est toujours au dessus de T.

   (LU) a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

   $$f(x) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}((x+3)^2 - 12x - 4) = \frac{1}{16}(x^2 - 6x + 5) = \frac{1}{16}(x-1)(x-5)$$

   Le résultat est négatif entre 1 et 5, donc sur $[1;5]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de (LU).
   Donc sur $[1;5]$, $\mathcal{C}$ est entre T et (LU).

   (d) La partie utile de la courbe, celle où les termes de la suite se trouvent, est encadrée par deux droites.

   On a déjà vu plusieurs fois en exercice qu'une relation de récurrence affine conduisait à une suite géométrique décalée par une constante.

   Donc la suite étudiée peut être encadrée par deux suites géométriques décalées qui convergent toutes les deux vers la même limite.

   Si la relation de récurrence est assez régulière, le même raisonnement pourra marcher à chaque fois que la dérivée au point fixe est strictement comprise entre 0 et 1 : si un des termes de la suite est assez près du point fixe pour que la courbe soit coincée entre la sécante et la tangente, et si le coefficient directeut de la sécante est strictement plus petit que 1, alors on peut encadrer la suite par deux suites géométriques décalées.