Tronc Commun Maple
Tracé de fractales élémentaires
Recherche de plus longue sous-suite commune.

Sujet

16 mars 2006

1 Tracé de courbes fractales élémentaires

Une fractale est un ensemble de points (formant en général une image) qui obéit à certaines propriétés : les structures obtenues sont invariantes par changement d'échelle au sens mathématique du terme.

1.1 Fractales Géométriques

Les fractales de cette classe sont visuelles. En dimension 2, elles sont construites à partir d'une ligne brisée (ou d'une surface, si on travaille en trois dimensions) appelée générateur. Chacun des segments qui forme une ligne brisée est remplacé par le générateur à l'échelle correspondante, à chaque étape de l'algorithme. La fractale apparaît en répétant ce remplacement indéfiniment.

On charge la bibliothèque graphique à l'aide de la commande `with(plots);`.
Une autre bibliothèque, `plottools`, permet de tracer des formes géométriques (cercles, arcs, polygones ...).
La commande `plot` permet d'effectuer des tracés :
`[> plot(cos)` ; on laisse à Maple le soin de définir la taille des axes.
`[> plot(cos(x), x=-Pi..Pi)` ; ou ...
`[> plot(cos,-Pi..Pi)` ; on spécifie les abcisses extrêmes du tracé.
`[> plot({cos(x),x},x=-Pi..Pi)` ; pour tracer plusieurs fonctions sur le même graphe.
`[> plot(tan(x),x=-4..4,y=-4..4)` ; pour forcer la taille de l'axe des ordonnées.
`[> implicitplot(abs(x) + abs(y)=1,x=-1..1,y=-1..1,grid=[100,100])` ; pour tracer une courbe définie implicitement.

FIG. 1 – **Rappel sur le tracé de courbes**

1.1.1 Le flocon de von Koch

Le processus de construction commence avec un segment de longueur unitaire. C'est la courbe de Koch d'ordre 0. Puis, chaque section (un seul segment à l'ordre 0) est remplacé par l'élément générateur représenté en 2, défini comme la courbe à l'ordre 1. Le résultat de la substitution donne la courbe de Koch à l'ordre suivant.

On appelle cette courbe *pré-fractale* quand l'ordre n est fini, et *fractale* quand n est infini.

1. Donner une fonction `koch2` qui prend pour arguments le quadruplet `p,h,s,o`, et qui renvoie les points composant la courbe de von Koch d'ordre `p` et de longueur `h`, tracée à partir du point de coordonnées `o`, inclinée d'un angle `s`$\Pi/3$ par rapport à l'axe des abcisses. On remarquera que `o` est ici un couple (`o=[x,y]`).

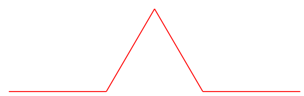

FIG. 2 – Le flocon de von Koch à l'ordre 1

2. Quel est le lien entre l'ordre et la longueur d'un segment de la courbe ? Écrire une fonction `koch(n)`, qui trace la courbe de Koch à l'ordre `n`.

1.2 Fractales Algébriques

On se place dans le plan complexe formé des points M d'affixe $x + iy$. On considère une suite complexe définie par $u_0 = z_0$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = f_c(u_n)$, où f_c est une certaine fonction complexe continue dépendant d'un paramètre $c \in \mathbb{C}$. On recherche alors les conditions initiales z_0 ou le paramètre c du plan complexe telle que la suite correspondante reste bornée. Les ensembles de Mandelbrot et de Julia sont construits à partir de telles suites.

Concretement on se donne une condition de divergence (C) et pour chaque condition initiale z_0 ou pour chaque valeur du paramètre c, on calcule les termes de la suite correspondante et on note n_0 le premier entier (s'il existe) tel que u_{n_0} vérifie la condition de divergence (C). À chaque entier N est associée une couleur $c(N)$, on colorie alors le point z_0 avec la couleur $c(n_0)$.

1.2.1 L'ensemble de MANDELBROT

L'ensemble de Mandelbrot est construit de cette manière. Pour $c \in \mathbb{C}$ on considère la fonction complexe $f_c(z) := z^2 + c$ et on s'interesse aux valeurs du paramètre c tel que la suite $(z_n)_n$ définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ reste bornèe. Pour l'ensemble de Mandelbrot, un critère de divergence acceptable est donné par $|z| > \epsilon$, nous prendrons ici $\epsilon = 2$.

1. Construire une procédure **couleur** prenant en argument x et y et renvoyant le premier indice $n \leq 30$ tel que z_n vérifie le critère de divergence si cela est possible et 30 sinon.
2. À l'aide de la fonction **plot3d** nous pouvons visualiser l'image obtenue de la manière suivante. Il suffit de demander à Maple de tracer la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$ en coloriant les points grâce à la fonction **couleur**, ce qui se traduit par la commande **plot3d(0, x_min..x_max, y_min..y_max, color=couleur, orientation=[0,0], numpoints=5000)**. On pourra prendre x_min=-2, x_max=1, y_min=-1 et y_max=1. Vous pouvez affiner l'image en modifiant le paramètre **numpoints**, attention toutefois à ne pas dépasser les capacités de vos machines.

1.2.2 Les ensembles de JULIA

Ces ensembles se construisent presque de la même façon que l'ensemble de Mandelbrot. Dans l'ensemble de Mandelbrot c balaye le plan. Pour l'ensemble de Julia, c est fixé comme paramètre pendant tout le calcul de l'image et l'on fait varier la condition initiale z_0. Ainsi à chaque c correspond un ensemble particulier à que l'on notera $J(c)$. Le point de coordonnées (x, y) appartient à $J(c)$ si et seulement si la suite définie par $z_0 = x + iy$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ reste bornée.

1. En reprenant la procédure de la question précédente, ecrivez une procédure couleur pour l'ensemble de Julia, toujours avec la même condition de divergence mais avec $\epsilon = 3$.
2. Visualisez l'image pour $c = -1.25$. Vous pouvez essayer d'autres valeurs pour le paramètre c.

2 Plus longue sous-suite commune (PLSC)

On dit qu'une suite $(u_k)_k$ est une sous-suite de la suite $(x_k)_k$ si on peux obtenir $(u_k)_k$ à partir de $(x_k)_k$ en éliminant certains termes, ie. s'il existe une suite strictement croissante $(i_k)_k$ telle que $u_k = x_{i_k}$.

Étant donné deux suite $(x_k)_{k=0}^n$ et $(y_k)_{k=0}^m$, on cherche une suite $(u_k)_{k=0}^p$ qui soit une sous-suite de $(x_k)_k$ et de $(y_k)_k$, et qui soit de longueur maximale parmis ces sous-suites.

1. Quelle serait la complexité d'un algorithme de recherche naïf ?
2. Montrer que ce problème possède une propriété de sous-strucuture : en comparant x_n et y_m, en déduire que $(u_k)_{k=0}^p$ ou $(u_k)_{k=0}^{p-1}$ est une certaine PLSC.
3. En déduire une formule de récurrence sur la longueur d'un plus longue sous-suite commune, et écrire une procédure maple pour la calculer. Comme on aura besoin plusieurs fois des mêmes sous-résultats, on stockera dans un tableau les longueurs des PLSC$((x_k)_{k=0}^i, (y_k)_{k=0}^j)$, pour $i \in \{0..n\}$ et $j \in \{0..m\}$.
4. Modifier le programme précédent pour retourner une PLSC.
5. Peut-on calculer la sous-suite en ne conservant que les longueurs dans le tableau ?