

Irrationalité de $\zeta(3)$

L'objectif de ce problème est l'étude du nombre :

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

En particulier, on démontre le théorème d'Apéry : $\zeta(3)$ est irrationnel. La présentation suivie est celle de Beukers.

1 Mise en place de la stratégie

Soient k, l deux entiers positifs ou nuls. On pose :

$$A_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} x^k y^l dx dy \quad B_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 -\ln(xy) x^k y^l dx dy$$

1. a) Vérifier rapidement la convergence des intégrales considérées.

b) Soient $k, l \in \mathbb{N}$. Calculer pour tout $t \geq 0$ l'intégrale :

$$f(t) = \int_0^1 \int_0^1 x^{k+t} y^{l+t} dx dy$$

c) En dérivant f sous le signe intégral, en déduire :

$$B_{k,l} = \begin{cases} \frac{1}{k-l} \left(\frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) & \text{si } k \neq l \\ \frac{2}{(k+1)^3} & \text{si } k = l \end{cases}$$

2. En développant $\frac{1}{1-xy}$ en série entière, en déduire pour tous entiers $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k > l$:

$$A_{k,l} = \frac{1}{k-l} \sum_{j=l+1}^k \frac{1}{j^2} \quad A_{l,l} = 2 \left(\zeta(3) - \sum_{j=1}^l \frac{1}{j^3} \right)$$

3. a) Soit maintenant un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et $d_n = \text{ppcm}(1, \dots, n)$. On fixe un polynôme P_n à coefficients entiers, de degré inférieur ou égal à n . On pose :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} P_n(x) P_n(y) dy dx$$

En décomposant $P_n(x)P_n(y)$ selon la base canonique et en utilisant les résultats précédents, montrer qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que :

$$d_n^3 I_n = a_n \zeta(3) + b_n$$

b) On fait maintenant l'hypothèse suivante :

($\mathcal{H}$) : Il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n soit de degré n et à coefficients entiers, et tels que en définissant I_n comme ci-dessus, on ait pour n assez grand $I_n > 0$, et pour n au voisinage de $+\infty$: $I_n = O(\alpha^n)$ (où $0 < \alpha < e^{-3}$).

Sous l'hypothèse ($\mathcal{H}$), démontrer que $\zeta(3)$ est irrationnel. On pourra admettre l'estimation suivante, conséquence du théorème des nombres premiers : $\ln(d_n) = n + o(n)$, et utiliser la a).

2 Construction des polynômes

On définit la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^n ((1-X)^n X^n)$$

On va vérifier que cette suite de polynômes vérifie bien l'hypothèse $(\mathcal{H})$, ce qui prouvera bien que $\zeta(3)$ est irrationnel. Pour cela, on définit comme dans la question 3 l'intégrale suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} P_n(x) P_n(y) dy dx$$

4. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est bien de degré n et à coefficients entiers.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$ et intégrable sur ce même intervalle. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 P_n(x) f(x) dx = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n (1-x)^n f^{(n)}(x) dx$$

b) Vérifier l'égalité :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x) P_n(y)}{1 - (1-xy)z} dy dx dz$$

On justifiera les éventuelles permutations d'intégrales.

c) En déduire à l'aide de a) la relation :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n}{(1 - (1-xy)z)^{n+1}} (1-x)^n P_n(y) dx dy dz$$

d) En permutant les intégrales et en passant de la variable z à la variable w par le changement de variable :

$$1-w = \frac{xyz}{1 - (1-xy)z}$$

en déduire l'égalité :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^n (1-w)^n \frac{P_n(y)}{1 - (1-xy)w} dw dy dx$$

e) Permuter à nouveau les intégrales, et utiliser la question a), cette fois-ci sur la variable y , pour obtenir :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi(x, y, w)^n}{1 - (1-xy)w} dy dw dx$$

où ϕ est la fonction définie sur $]0, 1[^3$ par :

$$\phi : (x, y, w) \mapsto \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1 - (1-xy)w}$$

6. On note $\alpha = \sup_{]0, 1[^3} \phi$ (α est a priori défini dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$). L'objectif de cette question est de majorer le nombre α .

a) Soient $x, y, w \in]0, 1[^3$. On suppose dans un premier temps que $x \geq \frac{1}{4}$ et $y \geq \frac{1}{4}$. Montrer que :

$$\phi(x, y, w) \leq \frac{1}{16} \frac{w(1-w)}{1 - \frac{15}{16}w} \leq \frac{3}{64}$$

b) Soient maintenant $x, y, w \in]0, 1[^3$ tels que $x \leq \frac{1}{4}$. Montrer, en remarquant que $1 - w \leq 1 - (1 - xy)w$, que :

$$\phi(x, y, z) \leq x(1 - x)y(1 - y) \leq \frac{3}{64}$$

c) En déduire finalement la majoration :

$$\alpha \leq \frac{3}{64} < e^{-3}$$

7. a) Montrer qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < I_n \leq I_0 \alpha^n \leq I_0 \left(\frac{3}{64} \right)^n$$

b) Conclure.