

Un calcul de $\zeta(2)$

L'objectif de ce problème est de montrer l'égalité suivante, due à Euler :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Cette égalité fait intervenir une série, c'est à dire une somme dont l'ensemble des indices est infini. A priori, cette notion n'est pas définie au niveau terminale. Cependant, la définition est des plus naturelle : par définition, la formule (1) ne signifie rien d'autre que :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$$

Pour ce faire, on adopte la stratégie suivante. Tout d'abord, on encadre les sommes partielles $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ à l'aide de sommes faisant intervenir uniquement des fonctions trigonométriques. Puis, on évalue explicitement ces sommes trigonométriques en utilisant les relations de Viète (ou relations coefficients-racines).

À cet effet, posons pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \qquad T_N = \sum_{n=1}^N \cotan\left(\frac{\pi n}{2N+1}\right)^2$$

1 Encadrement de S_N

L'objectif de cette partie est d'obtenir un encadrement de S_N en fonction de T_N . L'idée derrière cette stratégie est la suivante : T_N est assez proche de S_N , mais T_N est beaucoup plus facile à estimer que S_N .

1. a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

b) En déduire pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ l'encadrement :

$$\cotan(x)^2 \leq \frac{1}{x^2} \leq \cotan(x)^2 + 1$$

2. En sommant ces inégalités pour des valeurs de x bien choisies, prouver que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T_N \leq \frac{(2N+1)^2}{\pi^2} S_N \leq N + T_N$$

2 Calcul de T_N

Avec cet encadrement de S_N , on va voir qu'il suffit d'estimer T_N pour obtenir la limite de la suite $(T_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela, on calcule explicitement T_N en utilisant les relations de Viète. On introduit pour cela la famille de polynômes suivant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad P_N(X) = \sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{2k+1} (-1)^k X^{N-k}$$

3. En développant la relation $\sin((2N+1)t) = \Im((\cos(t) + i \sin(t))^{2N+1})$ avec le binôme de Newton, démontrer l'égalité :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin((2N+1)t) = P_N(\cotan(t)^2) \sin(t)^{2N+1}$$

4. On fixe dans cette question un entier $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Déduire de la question 3 que pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, le réel $x_n = \cotan \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right)^2$ est racine de P_N .

b) Montrer que les x_n pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ sont deux à deux distincts.

c) Le polynôme P_N admet-il d'autres racines que $x_1, \dots, x_n$?

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les relations de Viète, calculer la somme des racines de P_N . En déduire l'égalité :

$$T_N = \frac{2N(2N-1)}{6}$$

3 Conclusion

6. En réunissant les résultats des questions 2 et 5, montrer la formule d'Euler :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{c'est à dire :} \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$$

7. En déduire également la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Remarques culturelles :

Le problème du calcul de la somme des inverses des carrés d'entiers a été posé en premier par Pietro Mengoli en 1644. 40 ans plus tard, c'est Jacques Bernoulli qui le remettra au goût du jour, le baptisant au passage "problème de Bâle", du nom de la ville de naissance de Bernoulli. Le problème est résolu en 1735 par Leonhard Euler (dont la ville natale est également Bâle !), qui commence par en calculer numériquement des valeurs approchées très précises.

Par ailleurs, on peut également calculer, par des méthodes cependant plus sophistiquées, les valeurs de $\zeta(4), \zeta(6), \zeta(8) \dots$ (ζ étant définie par la relation $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ pour tout $s > 1$). En fait, on sait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^$, $\zeta(2n)$ s'écrit $\pi^{2n} q_n$ où q_n est un rationnel.    titre informatif, on a par exemple :*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

Ceci mène à une question des plus naturelle : et pour les $\zeta(2n+1)$,   a donne quoi ? Par exemple, est-ce que $\zeta(3)$ s'écrit sous la forme $\zeta(3) = \pi^3 q$ avec $q \in \mathbb{Q}$? La réponse est qu'à ce jour, on ne sait pas. Les nombres $\zeta(2n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^$ sont très mal compris par les mathématiciens. Un des seuls résultats vraiment conséquents en la matière est le fait suivant, démontré par le mathématicien français Ap  ry en 1978 : $\zeta(3)$ est un nombre irrationnel. Cependant, on ignore encore si $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \dots$ sont rationnels ou non.*