

Colles en MP* aux lycées Louis-le-Grand et Henri IV

Ferdinand Jacobé de Naurois

Contents

1	Algèbre	1
1.1	Combinatoire	1
1.2	Groupes	2
1.3	Anneaux et corps	3
1.4	Arithmétique	5
1.5	Polynômes et fractions rationnelles	6
1.6	Matrices et endomorphismes	7
1.7	Déterminants	8
1.8	Réduction	9
1.9	Espaces euclidiens	10
2	Analyse	12
2.1	Topologie	12
2.2	Suites numériques et vectorielles	14
2.3	Séries numériques, familles sommables	15
2.4	Fonctions réelles et complexes	17
2.5	Convexité	19
2.6	Suites et séries de fonctions	20
2.7	Séries entières	21
2.8	Intégrales	22
2.9	Probabilités	24
2.10	Équations différentielles	28
2.11	Calcul différentiel	29

1 Algèbre

1.1 Combinatoire

Exercice 1 (Régions dans un cercle)

On place n points en position générale sur le cercle unité, et on trace tous les segments de droites entre ces points. Combien cela délimite-t-il de régions dans le cercle ?

Exercice 2 (Caractéristique d'Euler)

On trace un graphe dans le plan, de sorte que deux arrêtes ne se croisent jamais. On note F le nombre de composantes connexes du plan que ce graphe délimite, V le nombre de sommets du graphe et E le nombre d'arrêtes. Montrer que $F + V = E + 2$.

Exercice 3 (Un théorème de Schur)

Soient $a_1, \dots, a_k \geq 1$ des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Soit b_n le nombre de manières d'écrire n comme combinaison linéaire à coefficients entiers des a_i . Montrer qu'au voisinage de l'infini, on a l'estimation :

$$b_n = \frac{n^{k-1}}{a_1 \cdots a_k \cdot (k-1)!} + O(n^{k-2})$$

Exercice 4 (Nombre de dérangements)

On appelle "dérangement" toute permutation sans point fixe. Donner un équivalent du nombre de dérangements de $\mathcal{S}_n$, pour $n \rightarrow \infty$.

Exercice 5 (Triangle de Pascal modulo 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre d'entrées impaires parmi la ligne n du triangle de Pascal. Montrer que $a_n = 2^{l_n}$, où l_n est le nombre de 1 dans l'écriture en binaire de n .

Exercice 6 (Nombres de Bell)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Exercice 7 (Existence d'un idempotent)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative qu'on note multiplicativement. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $x^2 = x$.

1.2 Groupes

Exercice 8 (Groupes dont les seuls sous-groupes sont triviaux)

Déterminer quels sont les groupes dont les seuls sous-groupes sont triviaux.

Exercice 9 (Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$)

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que G est soit monogène, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (Groupes à un nombre fini de sous-groupes)

Quels sont les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini ?

Exercice 11 (Le théorème 5/8)

Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que la probabilité que deux éléments de G , tirés au sort uniformément et indépendamment, commutent est majorée par $5/8$.

Montrer également que $5/8$ est optimal.

Exercice 12 (Automorphismes de $\mathcal{S}_n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ différent de 6. Montrer que les automorphismes de $\mathcal{S}_n$ sont tous intérieurs.

Exercice 13 (Groupes linéaires finis)

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q , et soit $n \geq 1$. Déterminer le cardinal des groupes $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\text{SL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 14 (Simplicité de $\mathcal{A}_5$)

On dit qu'un groupe est "simple" si et seulement si il n'a pas de sous-groupe distingué non trivial.

Montrer que $\mathcal{A}_4$ n'est pas simple, mais que $\mathcal{A}_5$ l'est.

Exercice 15 (Lemme de Cauchy)

Soit G un groupe fini, p un diviseur premier de $|G|$. On considère l'ensemble :

$$E = \{(x_1, \dots, x_p) \in G \mid x_1 \cdots x_p = 1\}$$

1. Montrer que le nombre d'éléments de G d'ordre divisant p est congru à $|E|$ modulo p .

2. En déduire l'existence d'un élément d'ordre p dans G .

Exercice 16 (Centre des p -groupes)

Soit G un groupe dont le cardinal est la puissance d'un nombre premier. En partitionnant G en classes de conjugaisons, montrer que le centre de G est non réduit à $\{1\}$.

Exercice 17 (Théorème de Sylow)

Soit G un groupe fini, de cardinal $n = p^a m$ où p est premier, $a \geq 1$ et m est premier avec p . On va prouver que G admet un sous-groupe de cardinal p^a .

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties de G à p^a éléments. On fait agir G sur $\mathcal{S}$ par multiplication à gauche.

1. Montrer que $|\mathcal{S}|$ n'est pas divisible par p , et en déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que l'orbite de S sous l'action de G soit de cardinal premier avec p . On fixe un tel S dans la suite.

2. En déduire que $P = \text{Stab}(S) = \{g \in G \mid gS = S\}$, le stabilisateur de S , est de cardinal divisible par p^a .

3. Montrer enfin que $|P| \leq p^a$ (on pourra trouver une injection $P \rightarrow \mathcal{S}$) et conclure.

Exercice 18 (Groupe d'automorphisme trivial)

Quels sont les groupes finis dont le groupe d'automorphismes est trivial ?

Exercice 19 (Théorème de Schur-Zassenhaus)

1. Soit p premier, $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Déterminer la signature de la permutation "multiplication par a " de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$.
2. Soit p premier, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Déterminer la signature de la permutation de $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ induite par la multiplication par A à gauche.

Exercice 20 (Orthogonalité des caractères)

Soit G un groupe fini, et $\chi_1, \chi_2 : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ deux morphismes de groupes. Montrer que, ou bien $\chi_1 = \chi_2$, ou bien :

$$\sum_{g \in G} \chi_1(g) \overline{\chi_2(g)} = 0$$

Exercice 21 (Sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{C}$)

1. Montrer que $\mathbb{C}$ n'a aucun sous-groupe d'indice fini non trivial.
2. Montrer que ceci reste vrai dans tout groupe abélien tel que $x \mapsto x^n$ soit surjective. Un tel groupe est dit "divisible".

Exercice 22 (Centre des p -groupes)

1. Montrer qu'un groupe dont le cardinal est la puissance d'un nombre premier a toujours un centre non trivial.
2. En déduire que tout groupe d'ordre p^2 , avec p premier, est abélien.

Exercice 23 (Borne sur le cardinal d'un sous-groupe fini)

Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si p est un nombre premier impair, alors la réduction modulo p se restreint en une injection $G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. En déduire une borne sur $|G|$.

1.3 Anneaux et corps

Exercice 24 (Groupe multiplicatif d'un corps)

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que tout sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$ est cyclique.

Exercice 25 (Carrés modulo p)

Montrer que les carrés dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sont exactement les éléments x vérifiant de $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Combien y en a-t-il ?

Exercice 26 (Anneau des entiers algébriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est un entier algébrique si et seulement si il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est un entier algébrique si et seulement si il est contenu dans un sous-anneau de $\mathbb{C}$ qui est de type fini comme groupe additif.
2. En déduire que l'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 27 (Équation de Cauchy)

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition de Cauchy si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Parmi les fonctions vérifiant la condition de Cauchy, déterminer celles qui sont continues, puis celles qui sont croissantes.
2. En déduire l'ensemble des automorphismes de corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 28 (Théorème de Wedderburn)

Soit $\mathbb{K}$ une algèbre à division finie (c'est à dire un corps fini, à ceci près qu'on ne requiert pas que la multiplication soit commutative). On va montrer que $\mathbb{K}$ est un corps, c'est à dire que la multiplication est commutative.

Soit k le centre de $\mathbb{K}$, c'est à dire la sous-algèbre de $\mathbb{K}$ formée des éléments qui commutent avec tout $x \in \mathbb{K}$.

Notons $\omega_1, \dots, \omega_r$ les classes de conjugaisons dans $\mathbb{K}^*$ qui ne sont pas réduites à un seul élément. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note k_i le commutant d'un élément arbitraire de ω_i .

1. Montrer que k est un corps fini, et qu'en notant $q = |k|$, on a $|\mathbb{K}| = q^n$ pour un certain entier $n \geq 1$. Montrer également que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a $|k_i| = q^{n_i}$ pour un certain entier $n_i \in [1, n-1]$.
2. En partitionnant $\mathbb{K}^*$ en classes de conjugaisons, montrer que :

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^r \frac{q^n - 1}{q^{n_i} - 1}$$

3. Notant Φ_n le n -ième polynôme cyclotomique, en déduire que $\Phi_n(q)$ divise $q - 1$.
4. Montrer que $|\Phi_n(q)| > q - 1$ à moins que $n = 1$, et conclure qu'on a donc nécessairement $n = 1$.

Exercice 29 (Astuce d'inversibilité)

Soit A un anneau non nécessairement commutatifs, et soient $a, b \in A$ tels que $1 - ab$ soit inversible dans A . Montrer que $1 - ba$ est inversible dans A .

Exercice 30 (Les entiers de Gauss)

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i]$. Pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, on note $N(z) = |z|^2$.

1. Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $N(z) = 1$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien pour le stathme N .
3. En déduire que les idéaux de $\mathbb{Z}[i]$ sont principaux.

Exercice 31 (Entiers quadratiques réels)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré et strictement supérieur à 1. On note $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, on note $N(x) = a^2 - db^2$.

1. Montrer que $x \in \mathbb{Z}[d]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[d]$ si et seulement si $N(x) = 1$.
2. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}[d]$ tels que $N(x) = 1$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^*$. En déduire qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}[d] \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que ce groupe soit engendré par ω et -1 .

Exercice 32 (Petits cas du théorème de Jacobson)

1. Soit A un anneau tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$. Montrer que A est commutatif.
2. Soit A un anneau tel que pour tout $x \in A$, $x^3 = x$. Montrer que A est commutatif.

Exercice 33 (Anneau avec peu d'idéaux)

Soit A un anneau intègre qui n'a qu'un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.

Exercice 34 (Dénombrement dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier, qu'on décompose comme produit de facteurs premiers distincts $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

1. Dénombrer les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en fonction des p_i et α_i .
2. Faire de même avec les nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Combien de solution a l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Exercice 35 (Cyclicité de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$)

Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.
- Soit $\alpha \geq 2$.
2. Montrer que $\overline{1+p}$ est d'ordre $p^{\alpha-1}$ dans $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$.
3. On considère la réduction modulo p : $\varphi : \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que l'image réciproque d'un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ par φ est d'ordre divisible par $p-1$.
4. Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est cyclique.

Exercice 36 (Structure de $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$)

1. Déterminer la structure du groupe multiplicatif des inversibles de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et enfin $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $5^{2^k} \equiv 1 + 2^{k+2} \pmod{2^{k+3}}$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 3$, 5 est d'ordre 2^{n-2} dans $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a un isomorphisme de groupes $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1.4 Arithmétique

Exercice 37 (Un théorème d'Erdős)

Une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est dite "multiplicative" si pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, on a $f(ab) = f(a)f(b)$. Elle est dite "complètement multiplicative" si pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$ on a $f(ab) = f(a)f(b)$.

1. Quelles sont les fonctions complètement multiplicatives croissantes ?
2. Quelles sont les fonctions multiplicatives croissantes ?

Exercice 38 (Théorème d'Ostrowski)

Une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ est une application $|\cdot| : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui se restreint en un morphisme de groupes $\mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, telle que $|0| = 0$ et enfin telle que $|x + y| \leq |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$.

Montrer que toute valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ est soit de la forme $|\cdot|_\infty^\lambda$ où $|\cdot|_\infty$ est la valeur absolue usuelle et $\lambda \in [0, 1]$, soit de la forme :

$$|\cdot|_p : x \mapsto e^{-cv_p(x)}$$

pour une certaine constante $c > 0$ et un nombre premier p (par convention, $v_p(0) = +\infty$).

Exercice 39 (Nombre moyen de diviseurs)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, τ_n le nombre de diviseurs positifs de l'entier n . Montrer que l'on a le développement asymptotique suivant, pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \tau_n = x \ln(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

où γ est la constante apparaissant dans le développement de la série harmonique.

Exercice 40 (Premier théorème de Mertens)

En considérant la décomposition en facteurs premiers de $n!$, montrer l'estimation suivante pour $n \rightarrow +\infty$, la somme portant sur les nombres premiers.

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$$

Exercice 41 (Postulat de Bertrand)

En étudiant les valuations p -adiques de $\binom{2n}{n}$, prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre premier dans l'intervalle $[n + 1, 2n]$.

Exercice 42 (Une congruence)

Soit p un nombre premier. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$$

Exercice 43 (Théorème de Wolstenholme)

Montrer que le numérateur du rationnel :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

est divisible par p^2 .

Exercice 44 (Nombres parfaits)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n , et on dit que n est parfait si $\sigma(n) = 2n$. Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où $2^p - 1$ est premier, et $p \geq 2$.

1.5 Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 45 (Équation fonctionnelle de Shapiro)

1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

2. Trouver ceux à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exercice 46 (Bijections de $\mathbb{Q}$)

1. Quels sont les polynômes $f \in \mathbb{C}[X]$ tels que $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$?

2. Trouver toutes les paires $(f, g) \in \mathbb{C}[X]^2$ telles que $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$.

Exercice 47 (Polynômes à valeurs entières)

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. En particulier, on montrera qu'il existe une $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}[X]$ telle que l'ensemble des polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ soit égal à $\bigoplus_{v \in \mathcal{B}} \mathbb{Z}v$.

Exercice 48 (Théorème de Liouville)

1. Soit $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n + R^n = 0$, où $n \geq 3$ est un entier. Montrer que P, Q, R sont proportionnels.

2. Donner un contre exemple dans le cas $n = 2$.

Exercice 49 (Théorème de Bernstein)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au plus n .

1. En décomposant la fraction rationnelle $\frac{X^k}{X^n+1}$ en éléments simples, montrer que si $z_1, \dots, z_n$ désignent les racines du polynôme $X^n + 1$, alors :

$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(x_k - 1)^2}$$

2. En déduire que : $\sup_{z \in \mathbb{U}} |P'(z)| \leq n \cdot \sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$.

Exercice 50 (Théorème de Kronecker)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire dont toutes les racines complexes sont de module 1. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unité.

Exercice 51 (Polynômes positifs)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 52 (Polynômes positifs sur $\mathbb{R}_+$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+X)^n P(X)$ soit à coefficients dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 53 (Une somme sur les racines)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples. On note $x_1, \dots, x_n$ ses racines. Calculer :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)}$$

Exercice 54 (Une identité harmonique)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Décomposer en élément simples la fraction rationnelle :

$$\frac{\prod_{i=0}^n (X+i) - n!}{\prod_{i=0}^n (X+i)}$$

2. En déduire l'égalité :

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k \binom{n}{k}}$$

Exercice 55 (Fractions rationnelles stabilisant un cercle)

Trouver toutes les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

Exercice 56 (Plan de polynômes scindés)

Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha A + \beta B$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que les racines de A et B sont entrelacées.

Exercice 57 (Caractérisation des n -gônes réguliers)

Soient $z_0, z_1, \dots, z_n$ n points du plan complexe, où $n \geq 2$. Montrer que $z_1, \dots, z_n$ forment les sommets d'un n -gône régulier de centre z_0 si, et seulement si pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ on a :

$$P(z_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(z_k)$$

Exercice 58 (Polynômes positifs)

1. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à valeurs positives est somme de deux carrés.

2. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$ s'écrit $A^2 + XB^2$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P([-1, 1]) \subseteq \mathbb{R}_+$ s'écrit $A^2 + (1 - X^2)B^2$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 59 (Formule de Hurwitz)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $n(z)$ le nombre de solutions de $P(x) = z$. Montrer que :

$$1 = \deg(P) - \sum_{z \in \mathbb{C}} (\deg(P) - n(z))$$

Exercice 60 (Continuité des racines)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ à racines simples, et $D_1, \dots, D_n$ des voisinages disjoints des racines de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ assez proche de P a une racine dans chaque D_i .

Exercice 61 (Polynômes carrés)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $P(n) = m^2$. On souhaite montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On définit $\Delta(f) : x \mapsto f(x+1) - f(x)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x > a$, il existe $\theta \in [0, n]$ tel que $\Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x + \theta)$.

2. Conclure en appliquant la question 1 à $\sqrt{P}$.

1.6 Matrices et endomorphismes

Exercice 62 (Trace nulle et commutateurs)

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle si et seulement si il existe $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = BC - CB$.

Exercice 63 (Automorphisme de l'algèbre des endomorphismes)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ un morphisme d'algèbres. Montrer que Φ est de la forme $f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$ pour un certain $g \in \text{GL}(E)$.

Exercice 64 (Lemme de Siegel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, où $n > m$. On note α la valeur absolue maximale des coefficients de A . Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{Z}^n$ tel que $AX = 0$ et $\|X\|_\infty \leq (n\alpha)^{\frac{m}{n-m}} + 1$ (où $\|X\|_\infty$ désigne la valeur absolue maximale des coefficients de X).

Exercice 65 (Rang de la comatrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps. Déterminer le rang de $\text{Com}(A)$, la comatrice de A .

Exercice 66 (Commutateur nilpotent)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 67 (Sous-groupes cycliques de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$)

Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $G \cap \text{SL}_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 68 (Un théorème de Burnside)

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et N un entier tel que $\forall g \in G, g^N = I_n$.

1. Soit $(M_1, \dots, M_d) \in G^d$ une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G . Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto (\mathrm{Tr}(gM_1), \dots, \mathrm{Tr}(gM_d)) \end{aligned}$$

est injective.

2. En déduire que G est fini.

Exercice 69 (Congruence avec la trace)

Soit p un nombre premier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A) \pmod{p}$.

Exercice 70 (Racine de la dérivation)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, D l'endomorphisme de dérivation de E . Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T \circ T = D$?

Exercice 71 (Paires de Weyl)

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il n'existe aucune paire $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ telle que $uv - vu = \mathrm{id}$.

2. Trouver des contre-exemples dans le cas où E est de dimension infinie, et dans le cas où $\mathbb{K}$ est de caractéristique non nulle.

1.7 Déterminants

Exercice 72 (Déterminant de la transposition)

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application qui envoie une matrice sur sa transposée. Calculer $\det(\Phi)$.

Exercice 73 (Parité des dérangements)

On appelle "dérangement" toute permutation sans point fixe. En utilisant un déterminant, calculer la différence entre le nombre de dérangements pairs et le nombre de dérangements impairs dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 74 (Déterminant de Smith)

Calculer $\det((\mathrm{pgcd}(i, j))_{1 \leq i, j \leq n})$.

Exercice 75 (Déterminant de Cauchy)

Soient $a_1, \dots, a_n$ des complexes deux à deux distincts, et $b_1, \dots, b_n$ également deux à deux distincts, où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Exercice 76 (Passage du complexe au réel)

Soit V un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n , et v un endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V .

On note W l'espace V muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $2n$, et on note w l'endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel W défini comme étant égal à v .

Montrer que :

$$\det(w) = |\det(v)|^2$$

Exercice 77 (Exemple de forme linéaire alternée)

Soit V un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et u un endomorphisme de V . On considère l'application n -linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n \det(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Montrer que l'application f est proportionnelle au déterminant, et donner le coefficient de proportionnalité.

Exercice 78 (Commutativité du polynôme caractéristique)

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps. Prouver que $X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$.

Exercice 79 (Invariance de la similitude par extensions)

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, $\mathbb{L}$ un corps contenant $\mathbb{K}$ (penser par exemple à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, ou bien à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{L})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Montrer qu'alors, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = QBQ^{-1}$.

Exercice 80 (Indépendances des fonctions)

Soit X un ensemble, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de X dans $\mathbb{C}$ qui forment une famille libre du $\mathbb{C}$ espace vectoriel $\mathbb{C}^X$. Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible.

Exercice 81 (Caractères algébriques de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$)

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, et $\Phi : \text{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ un morphisme de groupes polynomial. Montrer que Φ est une puissance du déterminant.

Exercice 82 (Utilisation d'une fonction affine)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont des 1. Montrer que le polynôme $\det(M + XJ)$ est de degré au plus 1.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 83 (Résultants de polynômes)

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ non nuls, avec $n = \deg P$ et $m = \deg Q$. 1. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{C}_{n+m-1}[X] \\ (U, V) &\mapsto PU + QV \end{aligned}$$

est bijective.

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P et Q soient premiers entre eux, sous la forme d'un déterminant.

3. Montrer que l'ensemble des $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que P soit de degré n à racines simples est un ouvert dense de $\mathbb{C}_n[X]$.

1.8 Réduction

Exercice 84 (Co-trigonalisation de rang 1)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $AB - BA$ soit de rang au plus 1. Montrer que A et B sont co-trigonalisables.

Exercice 85 (Continuité du polynôme minimal)

Déterminer l'ensemble des points de continuité de l'application qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme minimal π_A .

Exercice 86 (Sommes et produits de valeurs propres)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer le spectre des applications linéaires :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AM + MB & M &\mapsto AMB \end{aligned}$$

2. En déduire que l'ensemble des entiers algébriques (racines dans $\mathbb{C}$ d'un polynôme unitaire à coefficients entiers) est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 87 (Diagonalisables cycliques)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer parmi les endomorphismes diagonalisables de E , lesquels sont cycliques ($u : E \rightarrow E$ est cyclique si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $(u^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ engendre E).

Exercice 88 (Preuve analytique du théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on note χ_A le polynôme caractéristique, et soit $r > 0$ tel que toutes les valeurs propres de A soient de modules $< R$. On considère l'intégrale :

$$f(r) = \int_0^{2\pi} r e^{i\theta} \chi_A(r e^{i\theta}) (r e^{i\theta} - A)^{-1} d\theta$$

1. Montrer que $f(r) = 0$.
2. Montrer également que $f(r) = 2\pi \chi_A(A)$, et conclure que $\chi_A(A) = 0$.

Exercice 89 (Diagonalisabilité du carré)

1. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ dont une puissance est diagonalisable. Montrer que M l'est également.
2. Donner un contre-exemple dans le cas où on ne fait pas l'hypothèse que M est inversible.

Exercice 90 (Calcul d'une exponentielle)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 91 (Éléments d'ordre premier dans $\text{GL}_k(\mathbb{Q})$)

Soit p un nombre premier, $k \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket$ et $A \in \text{GL}_k(\mathbb{Q})$ telle que $A^p = I_k$. Montrer que $A = I_k$.

Exercice 92 (Commutant d'une matrice diagonalisable)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un espace vectoriel de dimension $\geq n$, et déterminer le cas d'égalité.

Exercice 93 (Réduction de Jordan)

Soit $u : V \rightarrow V$ un endomorphisme nilpotent, où V est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Supposons, seulement dans cette question, que u est nilpotent d'indice $n = \dim(V)$. Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de u n'a que des 1 sur la sur-diagonale, et des zéros partout ailleurs.

Indication : introduire le polynôme minimal ponctuel.

2. On revient au cas général. Montrer qu'il existe $V_1, \dots, V_k$ des sous-espaces de V supplémentaires, stables par u tels que la restriction de u à chacun des V_i soit nilpotente d'indice $\dim(V_i)$.

Indication : commencer avec une base b de $\text{Im}(u^{p-1})$, où p est l'indice de nilpotence de u , et la tirer en arrière par u en une famille c telle que $b \cup c$ soit libre.

Exercice 94 (Exponentielle négative)

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $\exp(M) = -I_n$.

1.9 Espaces euclidiens

Exercice 95 (Distance à un sous-espace)

Soit E un espace euclidien, V un sous-espace de E dont on note $(x_1, \dots, x_d)$ une base. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$d(x, V)^2 = \frac{\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n, x))}{\det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n))}$$

Exercice 96 (Inégalité de normes)

Soit E un espace euclidien, $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ distincts, on a $\langle x_i, x_j \rangle = -1$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^p \frac{1}{1 + \|x_i\|^2} \leq 1$$

Exercice 97 (Expression d'un projecteur)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive définie. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} A \cdot (A^2 + x^2 I_n)^{-1} dx$$

Exercice 98 (Racine carrée symétrique)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. On note B l'unique racine carrée symétrique positive de A . Montrer que B est un polynôme en A .

Exercice 99 (Principe de Ky-Fan)

Soit E un espace euclidien de dimension n , et $u \in \mathcal{S}(E)$. Si V est un sous-espace vectoriel de E , on note $u_V : V \rightarrow V$ l'endomorphisme obtenu comme composition de u avec la projection orthogonale sur V . On note $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de u .

Montrer que pour tout $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i = \max_{\substack{V \subseteq E \\ \dim(V)=d}} \text{Tr}(u_V)$$

Exercice 100 (Inégalité de Minkowski)

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 101 (Matrice de Gram)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la matrice dont le coefficient d'indices i, j est $\frac{1}{a_i + a_j}$ est définie positive.

Exercice 102 (Matrice entière positive)

Soit A un ensemble, $A_1, \dots, A_n$ des parties de A . Montrer que la matrice de taille $n \times n$ dont le coefficient d'indices i, j est $|A_i \cap A_j|$ est une matrice symétrique définie positive.

Exercice 103 (Densité du groupe orthogonal rationnel)

Montrer que $\text{SO}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\text{SO}_n(\mathbb{R})$. On pourra commencer par traiter le cas $n = 1$.

Exercice 104 (Distance aux matrices de rang au plus r)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On munit $\mathcal{M}_n$ de sa structure euclidienne canonique. Pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note R_r l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang au plus r . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la distance entre A et R_r est atteinte, et la calculer en fonction du spectre de A .

2. Faire de même sans l'hypothèse selon laquelle A est symétrique.

Exercice 105 (Matrices symétriques positives entières)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$.

2. Déterminer les éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$, et les dénombrer.

Exercice 106 (Critère de positivité)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\text{Tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 107 (Inégalités de trace et positivité)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\text{Tr}(A) \geq \sqrt{(n-1)\text{Tr}(A^2)} \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Tr}(A) \geq \sqrt{\text{Tr}(A^2)}$$

Exercice 108 (Critère d'appartenance à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall O \in O_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(OA) \leq \text{Tr}(A)$$

Exercice 109 (Inégalité d'Hadamard)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Comparer $\det(A)$ et $\prod_i a_{i,i}$.

2 Analyse

2.1 Topologie

Exercice 110 (Exemple d'application linéaire continue)

On munit l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$. Trouver une forme linéaire sur E continue pour une des normes, mais pas la deuxième. Peut-on trouver une forme linéaire continue pour la deuxième mais pas pour la première ?

Exercice 111 (Un exemple d'équivalence des normes)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une constante C_n telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus n , on ait :

$$\int_0^1 |P| \leq C_n \cdot \sum_{i=0}^n |P(i)|$$

Exercice 112 (Les sept espaces de Kuratowski)

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles suivants soient distincts :

$$A, \overset{\circ}{A}, \overline{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$$

Exercice 113 (Ensemble stable par moyenne géométrique)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ bornée et stable par moyenne géométrique. Montrer que $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $[\inf A, \sup A]$.

Exercice 114 ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes)

Prouver que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 115 (Un exercice de Gustave Choquet)

Montrer que $[0, 1]$ n'est pas réunion dénombrable de fermés disjoints.

Exercice 116 (Espaces parfaits)

Une partie X de $\mathbb{R}^n$ est dite "parfaite" si elle est fermée et sans point isolé. Montrer qu'une partie parfaite non vide est nécessairement indénombrable.

Exercice 117 (Applications k -contractantes)

Soit (X, d) un espace métrique complet, $k \in [0, 1[$ et $f : X \rightarrow X$ une application k -contractante, c'est à dire vérifiant :

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Montrer que pour tout $x_0 \in X$, la suite définie par la donnée de x_0 et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge.

Exercice 118 (Caractérisation de la banachicité)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer qu'il est complet si, et seulement si toute série convergeant normalement dans E converge.

Exercice 119 (Théorème de Baire)

Soit (X, d) un espace métrique complet. Montrer que toute réunion dénombrable de fermés de X d'intérieur non vide est d'intérieur non vide.

Exercice 120 (Dérivation non continue)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $D : E \rightarrow E$ qui envoie une fonction sur sa dérivée n'est continue pour aucune norme sur E .

Exercice 121 (Diamètre de la frontière)

Soit A une partie d'un espace métrique (X, d) . On définit le diamètre de A par :

$$\text{diam}(A) = \sup_{a, b \in A} d(a, b)$$

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et A une partie bornée de E . Montrer que :

$$\text{diam}(A) = \text{diam}(\text{Fr}(A))$$

où $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ est la frontière de A .

Exercice 122 (Spectre d'un espace de fonctions)

1. Soit K un espace métrique compact, $E = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in K$, on note $m_x = \{f \in E \mid f(x) = 0\}$. Montrer que tout idéal propre de E est contenu dans un m_x .

2. Donner un contre exemple quand x n'est pas compact.

Exercice 123 (Formes linéaires positives)

Soient $a < b$ des réels, et $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit φ une forme linéaire sur E qui est positive, c'est à dire que : $\forall f \in E, f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$. Prouver que φ est continue.

Exercice 124 (Formes linéaires continues et noyau)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et φ une forme linéaire sur E .

Montrer que φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 125 (Hyperplans en dimension infinie)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace métrique. Montrer que tout hyperplan de E est fermé ou dense dans E .

Exercice 126 (Boule unité non compacte)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que sa boule unité est non compacte. On pourra commencer par l'exemple de $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Exercice 127 (Sommes de sous-ensembles)

1. Montrer que la somme de deux compacts est compacte.

2. Montrer que la somme d'un fermé et d'un compact est fermée.

3. Que dire de la somme de deux fermés ?

Exercice 128 (Théorème de Carathéodory)

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, et x dans l'enveloppe convexe de A . Montrer que x est dans l'enveloppe convexe de $n + 1$ points de A .

2. Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Exercice 129 (Théorème de Krein-Milman)

1. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$, x un point de la frontière de K . Montrer qu'il existe un hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$ contenant x tel que K soit entièrement d'un côté de H .

2. Montrer qu'un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

3. En déduire l'enveloppe convexe des matrices de permutations.

Exercice 130 (Théorème de point fixe)

Soit E un espace euclidien, B une boule dans E , et $f : E \rightarrow E$ linéaire telle que $f(B) \subseteq B$. Montrer que f admet un point fixe.

Indication : On pourra considérer $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^k(a)$.

Exercice 131 (Graphe fermé)

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe de f est fermé.

2. Montrer que si f est bornée de graphe fermé, alors f est continue.

3. Montrer que ce n'est plus vrai si on ne suppose plus f bornée.

Exercice 132 (Connexité des nilpotentes)

Les matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{C}$ forment-elles un ensemble connexe ? Et si on enlève zéro ?

Exercice 133 (Densité de $\text{SO}_n(\mathbb{Q})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supérieure ou égal à 2. Montrer que $\text{SO}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 134 (Système dynamique presque périodique)

Soit K un espace métrique compact, et (u_n) une suite d'éléments de K vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{1n+1} = f(u_n)$ où $f : K \rightarrow K$ est une fonction continue. On suppose que (u_n) n'a qu'un nombre fini p de valeurs d'adhérence. Montrer que, pour tout $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la suite (u_{pn+r}) converge.

Exercice 135 (Connexité d'une partie du plan co-dénombrable)

Montrer que $\mathbb{C} \setminus A$ où A est dénombrable est connexe par arcs. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 136 (Zariski densité)

Prouver que $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est dense dans $\mathbb{C}^n$ si f est polynomiale.

Exercice 137 (Système dynamique)

Sur $[0, 1]$. Soit K compact, $f : K \rightarrow K$ continue et $u_{n+1} = f(u_n)$ tq $d(u_{n+1}, u_n)$ tend vers 0. Prouver que u_n converge. Mq les valeurs d'adhérences sont connexes et sont toutes des points fixes...

2.2 Suites numériques et vectorielles

Exercice 138 (Le lemme des pics)

Montrer que de toute suite réelle on peut extraire une suite monotone. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 139 (Lemme de Fekete)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on ait : $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers $\inf_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{u_m}{m}$.

Exercice 140 (Limite à partir de $u_n + \frac{1}{u_n}$)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que : $u_n + \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$. Montrer que u_n converge et déterminer sa limite.

Exercice 141 (Cercle d'adhérence)

Décrire géométriquement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

Exercice 142 (Récurrence homographique variable)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$$

Montrer que, au voisinage de l'infini, on a : $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Exercice 143 (Valeurs d'adhérence d'un cosinus)

Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\ln(n)))_{n \geq 1}$.

Exercice 144 (Suites de Schwob)

Soient $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ les suites définies par la donnée de a_0, b_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ convergent vers la même limite, et la calculer.

Exercice 145 (Une équation fonctionnelle)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = 6x - f(x)$$

Exercice 146 (Moyenne avec le module)

Soit la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ de complexes définie par la donnée de z_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

Exercice 147 (Formule de Stirling sans la constante)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n! \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Donner la nature de la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et en déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle qu'on ait au voisinage de $+\infty$:

$$n! \sim C \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

Exercice 148 (Topologie des valeurs d'adhérence)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Si u est une suite bornée d'éléments de E , montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un compact.
2. Réciproquement, montrer que tout compact de E est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée.

Exercice 149 (Équivalent d'une suite récurrente)

Trouver un équivalent de la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

Exercice 150 (Étude locale d'un système dynamique)

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant le développement asymptotique : $f(x) = x - cx^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de 0, où $c > 0$ et $\alpha > 1$. Montrer que pour u_0 assez petit, la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers 0, et en donner un équivalent.
2. Faire de même avec la fonction $f : x \mapsto x - e^{-\frac{1}{x}}$.

Exercice 151 (Développement d'une racine)

Soit x_n la plus petite racine strictement positive de $X^n - nX + 1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n .

Exercice 152 (Développement d'une solution à une équation logarithmique)

Soit x_n l'unique solution positive de l'équation $x + \log(x) = n$. Donner un développement asymptotique de x_n à deux termes.

Exercice 153 (Convergence au sens de Césaro)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de réels positifs. Montrer que (u_n) converge vers 0 au sens de Césaro si et seulement si il existe une partie $A \subseteq \mathbb{N}$ telle que :

(i) On ait $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \notin A} 0$

(ii) A est de densité nulle, c'est à dire $\frac{1}{n}|A \cap [1, n]| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Exercice 154 (Étude d'une suite avec une condition de convergence)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs ou nuls telle que : $n(u_n + u_{2n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

2.3 Séries numériques, familles sommables

Exercice 155 (Série des $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$)

Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

Exercice 156 (Support d'une famille sommable)

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, montrer que $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Exercice 157 (Nature d'une série avec π et e)

Quelle est la nature de la série de terme général $\sin(\pi en!)$?

Exercice 158 (Transformation d'Abel)

1. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\sin(n)}{n}$?

2. Quid de celle de terme général $\frac{|\sin(n)|}{n}$?

Exercice 159 (Une somme avec ζ)

Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\frac{\zeta(n)-1}{n}$.

Exercice 160 (Quelques calculs de sommes)

1. Montrer que la somme suivante est finie et la calculer :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q+1)^3}$$

2. Même question avec :

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{mn}}{m^2 n^2}$$

3. Même question avec :

$$\sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N}^* \\ a|b}} \frac{1}{a^2 b^2}$$

Exercice 161 (Un télescope)

Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

Exercice 162 (Théorème de ré-arrangement de Riemann)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. On suppose que la série de terme général a_n converge mais ne converge pas absolument. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la série de terme général $a_{\sigma(n)}$ converge vers x .

Exercice 163 (Sommabilité sur $\mathbb{Z}^d$)

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$, et soit $\lambda > 0$. À quelle condition la famille $(N(v)^{-\lambda})_{v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}}$ est-elle sommable ?

Exercice 164 (Famille espacée)

Soit $(z_i)_{i \in I}$ une famille de complexes non nuls telle que :

$$\inf_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j}} |z_i - z_j| \neq 0$$

Montrer que pour tout $\alpha > 2$, la famille $\left(\frac{1}{|z_i|^\alpha}\right)_{i \in I}$ est sommable. Ce résultat subsiste-t-il si $\alpha = 2$?

Exercice 165 (Décomposition en élément simples infinie)

Soit $x > 0$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)} = -e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)}$$

Exercice 166 (Inégalité de Carleman)

Montrer que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de réels positifs, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

et montrer que la constante e est optimale dans cette inégalité.

Exercice 167 (Série avec des pgcd)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs strictement croissante. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{ppcm}(a_1 \cdots a_n)} < +\infty$$

Exercice 168 (Somme de Goldbach)

Soit R l'ensemble des entiers positifs qui sont des puissances exactes : un élément $r \in \mathbb{N}^*$ est dans R si et seulement si il s'écrit sous la forme m^n avec m, n entiers ≥ 2 . Calculer la somme :

$$\sum_{r \in R} \frac{1}{r-1}$$

Exercice 169 (Une somme avec l'indicatrice d'Euler)

Soit φ l'indicatrice d'Euler et $a \in]1, +\infty[$. Calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{a^n - 1}$$

Exercice 170 (Somme avec des nombres premiers)

Pour tout $n \geq 2$, soit a_n le plus grand diviseur premier de n . Montrer que la série de terme général $\frac{1}{na_n}$ converge.

On pourra utiliser le fait que $p_k = O(k \log(k))$, où p_k est le k -ième nombre premier.

Exercice 171 (Sommabilité implique petitesse)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui est sommable. Montrer que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2.4 Fonctions réelles et complexes

Exercice 172 (Zéros du polynôme de Taylor du sinus)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k X^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Montrer que le nombre c_n de racines réelles de P_n (comptées avec multiplicité) vérifie :

$$c_n \sim \frac{4n}{e\pi}$$

Exercice 173 (Morphismes d'anneaux de fonctions réelles)

Trouver tous les morphismes d'anneaux de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On pourra commencer par montrer qu'un tel morphisme est nécessairement à valeur dans l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 174 (Théorème de Darboux)

Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction dérivable, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 175 (Inégalités de Kolmogorov)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, ou $n \geq 2$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose :

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$$

On suppose M_0 et M_n finis. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, M_k est fini et :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

Exercice 176 (Fonctions mid-convexes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x, y \in I$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 177 (Théorème de division)

Soient $n \geq 1$, I un intervalle réel non vide et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in I$. On suppose que f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n s'annulent en x_0 . Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Exercice 178 (Dérivations de l'anneau des fonctions lisses)

Trouver toutes les applications linéaires $\Phi : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ telles que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ on ait $\Phi(fg) = f\Phi(g) + g\Phi(f)$.

Exercice 179 (Égalité arithmético-géométrique)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x, y) \in I^2$, on ait $f(x) = f(y)$ ou $f(\sqrt{xy}) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Montrer que f est constante.

Exercice 180 (Lemme des cordes de Lévy)

1. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - q^{-1}]$ tel que $f(x + q^{-1}) = f(x)$.
2. Si $a \in]0, 1[$ n'est pas l'inverse d'un entier, construire une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, 1 - a]$, $f(x + a) \neq f(x)$.

Exercice 181 (Graphe dense)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(\pi n!x)$ si la limite existe et est finie, et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f admet tout rationnel comme période.
2. Montrer que f est surjective.
3. Montrer que l'image de n'importe quel ouvert non vide par f est $\mathbb{R}$.

Exercice 182 (Solutions pathologiques à l'équation de Cauchy)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est soit une fonction linéaire, soit son graphe est dense dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 183 (Racine de l'exponentielle)

Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \exp$.

Exercice 184 (Valeurs intermédiaires sur le cercle)

1. Soit $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $f(z) = f(-z)$.
2. Soient $f, g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer qu'il existe $z, z' \in \mathbb{U}$ distincts tels que $f(z)g(z') = f(z')g(z)$.

Exercice 185 (Théorème du relèvement)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $t_0 \in I$. Soit θ_0 un argument de $f(t_0)$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $\theta(t_0) = \theta_0$ et telle que pour tout $t \in I$ on ait :

$$f(t) = |f(t)|e^{2\pi i\theta(t)}$$

On dit que θ est un argument de f .

2. Supposons maintenant que $I = [a, b]$ avec $a < b$ et $f(a) = f(b)$. On définit $N_\theta(f) = \theta(b) - \theta(a)$ où θ est un relevé de f . Montrer que $N_\theta(f)$ est indépendant de f . On appelle cette quantité le "nombre de tours" de f .
3. Montrer qu'il n'existe aucune fonction continue $L : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exp \circ L = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$. On pourra par exemple montrer que si il en existe, alors $t \mapsto \frac{1}{2\pi i} L(e^{2\pi i t})$ est un argument de $t \mapsto e^{2\pi i t}$.

Exercice 186 (Contrôle des dérivées)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, telle que f et toutes ses dérivées sont nulles en zéro, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| \leq n!$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 187 (Théorème de Corominas)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Telle que pour tout $x \in I$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n_x)}(x) = 0$. Montrer que f est polynomiale.

Commencer par trouver un intervalle sans zéro de f où f n'est pas polynomiale !

Exercice 188 (Théorème de Whitney)

Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction lisse. Ceci reste-t-il vrai avec des fonctions analytiques ?

Exercice 189 (Une équation fonctionnelle)

Soient $a, b, c > 0$ deux à deux distincts et f une fonction lisse de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$. Montrer que $f = 0$.

Indication : dériver n fois et ré-arranger.

Exercice 190 (Continuité au sens de Césaro)

Une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au sens de Césaro si et seulement si elle respecte les convergences de Césaro. Déterminer les fonctions continues au sens de Césaro.

2.5 Convexité

Exercice 191 (Généralités sur les fonctions convexes)

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe tendant vers 0 en $+\infty$. Montrer que f est positive.
2. Soit f convexe sur un ouvert. Montrer que f est continue. Ceci reste-t-il vrai sur un segment ?

Exercice 192 (Équivalence de convexité)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ l'est.

Exercice 193 (Inégalité de convexité)

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n b_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 194 (Adhérence et intérieur d'un convexe)

Soit C un convexe d'un espace vectoriel normé. Montrer que l'intérieur de C et l'adhérence de C sont convexes.

Exercice 195 (Théorème de Krein-Milman)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un point x de K est "extrémal" si et seulement si pour tous $y, z \in K$ tels que $x = \frac{y+z}{2}$, on a $x = y = z$.

1. Montrer que K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite "bistochastique" si et seulement si tous ses coefficients sont ≥ 0 , et la somme des coefficients dans chaque ligne de M vaut 1, et de même pour les colonnes de M . On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est compact.
3. En déduire que toute matrice bistochastique est une moyenne pondérée de matrices de permutation.

Exercice 196 (Théorème de Carathéodory)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A une partie de $\mathbb{R}^n$. On note $\text{Conv}(A)$ son enveloppe convexe.

1. Montrer que pour tout $x \in \text{Conv}(A)$, il existe $x_0, \dots, x_n$ tels que $x \in \text{Conv}(\{x_0, \dots, x_n\})$.
2. En déduire que dans $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Exercice 197 (log-concavité du déterminant)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $A \mapsto \log \det(A)$ définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est concave.

Exercice 198 (Caractérisation de la fonction Γ par convexité)

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe si et seulement si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que la fonction Γ est log-convexe.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction log-convexe telle que $f(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) = xf(x)$.

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(f(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\ln(x) + x \ln(n) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right]$$

b) En déduire que Γ est l'unique fonction log-convexe f telle que $f(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) = xf(x)$, et en déduire également que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

2.6 Suites et séries de fonctions

Exercice 199 (Convergence vers l'intégrale de Gauss)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$ $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $x \in [0, \sqrt{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > \sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. On pourra faire intervenir les intégrales de Wallis.

Exercice 200 (Série lacunaire de l'exponentielle)

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!}$$

Montrer qu'on ne peut pas avoir, au voisinage de $+\infty$, l'équivalent : $f(x) \sim \frac{e^x}{x^2}$.

Exercice 201 (Suite de fonctions lipschitziennes)

1. Soit $k > 0$, S un segment de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions k -lipschitziennes de S dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement. Montrer que la convergence est uniforme.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions convexes qui converge simplement sur I vers une fonction f . Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Exercice 202 (Une série de fonctions non uniformément convergente)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\frac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

4. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 203 (Approximation à coefficients entiers)

Soit S un segment de $\mathbb{R}$. On munit l'espace $E = \mathcal{C}(S, \mathbb{R})$ de la norme infinie. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans E si et seulement si S ne contient pas d'entier.

Exercice 204 (Approximation croissante)

Montrer que toute fonction réelle croissante sur un segment s'approche uniformément sur ce segment par des polynômes croissants sur ce même segment.

Exercice 205 (Approximation paire)

Soit S un segment contenu dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que toute fonction continue de S dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes pairs.

Exercice 206 (Développement de la cotangente)

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x-k}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vers une fonction f .
2. Montrer que la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, g(x) = \pi \cotan(\pi x) - f(x)$ se prolonge en une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et 1-périodique, qu'on continuera d'appeler g .
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de g en fonction de $g(\frac{x}{2})$ et $g(\frac{x+1}{2})$.
4. En déduire, en utilisant également la périodicité de g , que $g = 0$.

Exercice 207 (Exemples de convergence simple ou uniforme)

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $f_n(x) = \sin(x)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = e^{\frac{n-1}{n}x}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $] -\infty, A]$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 208 (Contre-exemple pour la dérivation)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f , et que la suite $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction $g \neq f'$.

2.7 Séries entières

Exercice 209 (Rayons de convergence)

Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

$$\sum \sin(n)x^n \quad \sum \binom{2n}{n} x^n \quad \sum H_n^{\ln(n)} x^n \quad \sum 2^{\sqrt{n^2-n}} x^{3n}$$

$$\sum \sin(\pi(\sqrt{2}+1)^n) x^n \quad \sum \sin(\pi en!) x^n$$

(H_n désigne le n -ième nombre harmonique, somme partielle de la série harmonique)

Exercice 210 (Un rayon de convergence)

Donner, en fonction de θ , le rayon de convergence de la série entière de terme général $e^{n \sin(n\theta)} z^n$.

Exercice 211 (Rigidité)

1. Que dire d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n+1}$?
2. Que dire d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 vérifiant $f(\frac{1}{n}) = O(e^{-n})$ pour $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 212 (Nombre d'involutions)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma^2 = 1$. On considère la série entière de terme général $\frac{u_n}{n!} x^n$. Calculer son rayon de convergence, sa somme et en déduire une expression de u_n .

Exercice 213 (Équivalent au bord du disque)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent pour $x \rightarrow 1^-$ de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$$

2. Faire de même avec :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$$

Exercice 214 (Un calcul de l'intégrale de Gauss)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^2 + b^2 \leq n$.

On considère les séries entières :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n x^n$$

1. Donner un équivalent de $f(x)$ pour $x \rightarrow 1^-$ faisant intervenir l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$.
2. Donner un développement asymptotique de (r_n) à la précision $O(n)$, et en déduire un équivalent de $g(x)$ pour $x \rightarrow 1^-$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \frac{f(x)^2}{1-x}$, et en déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$.

Exercice 215 (Un théorème de Bernstein)

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle ouvert. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(I) \subseteq \mathbb{R}_+$. Montrer que f est développable en série entière en tout point de I .

Exercice 216 (Un théorème de Mazurkiewick)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de polynômes divisibles par x^n .
2. Montrer l'existence d'une suite de complexes $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que pour toute fonction continue $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ nulle en zéro, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que : $\left(x \mapsto \sum_{k=1}^{\varphi(n)} a_k x^k\right)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$.

Exercice 217 (Impossibilité de prolonger continûment à la frontière)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1, posons :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$$

Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{U}$, tout voisinage V de z_0 , f est non bornée sur l'intersection de V avec le disque unité ouvert.

Exercice 218 (Sommabilité au sens d'Abel)

Montrer qu'il existe un réel l , que l'on déterminera, tel que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} l$$

Exercice 219 (Une limite avec une série entière)

Après avoir prouvé son existence, donner la limite pour $x \rightarrow +\infty$ de :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

2.8 Intégrales

Exercice 220 (Irrationnalité de e)

1. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{Z} + e\mathbb{Z}$, et en déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer similairement que $\cos(1)$ et $\sin(1)$ sont irrationnels.

Exercice 221 (Une intégrale non-élémentaire)

Montrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Exercice 222 (Étude asymptotique d'une intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 1$. Donner un équivalent pour $n \rightarrow +\infty$ de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 f(t) \cos(2\pi t)^n$$

Exercice 223 (Transformée de Laplace)

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ bornée, on définit la transformée de Laplace $\mathcal{L}f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}f(y) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-xy} dx$$

1. On suppose $f(0) \neq 0$. Montrer que pour $y \rightarrow +\infty$, on a $\mathcal{L}f(y) \sim \frac{f(0)}{y}$.
2. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ pour une certaine limite $l \in \mathbb{C}^*$. Montrer que pour $y \rightarrow 0^+$, on a $\mathcal{L}f(y) \sim \frac{l}{y}$.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ bornée dont la transformée de Laplace est nulle. Montrer que $f = 0$.

Exercice 224 (Une intégrale avec $\zeta(2)$)

Calculer l'intégrale suivante après avoir montré sa convergence :

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$$

Exercice 225 (L'intégrale de Raabe)

On rappelle que la fonction Γ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Montrer en utilisant la formule de Stirling que pour tout $a > 0$, on a :

$$\int_a^{a+1} \ln(\Gamma(x)) dx = a \ln(a) - a + \frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

Exercice 226 (Borne inférieure sur une intégrale)

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que :

$$\inf_{f \in E} \int_0^1 |f' - f| = \frac{1}{e}$$

Exercice 227 (Une autre intégrale avec $\zeta(2)$)

Calculer l'intégrale suivante, en effectuant une permutation série-intégrale.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}} dt$$

Exercice 228 (L'intégrale de Dirichlet)

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}$$

On pourra dériver sous le signe intégral.

3. En déduire la valeur de l'intégrale de la question 1.

Exercice 229 (Formule de Stirling par une méthode intégrale)

En partant de l'égalité $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, montrer l'équivalent pour n tendant vers $+\infty$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Exercice 230 (Formule du produit pour Γ)

1. Montrer la formule du produit suivante pour la fonction Γ :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{1}{xe^{\gamma x}} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}$$

2. Vérifier que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer $\Gamma'(1)$ en utilisant la formule du produit ci-dessus.

3. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t}$$

Exercice 231 (Formule de duplication pour Γ)

En utilisant par exemple la formule du produit pour Γ , montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$$

2.9 Probabilités

Exercice 232 (Une formule d'espérance)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

2. Si de plus X est de variance finie, donner une expression de $\mathbb{E}(X^2)$ sous forme de somme visant intervenir les $\mathbb{P}(X \geq n)$.

Exercice 233 (Généralisation du collectionneur)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi d'une variable aléatoire fixée X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $R_n = |\{X_1, \dots, X_n\}|$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\mathbb{E}(R_n) \leq a + n\mathbb{P}(X \geq a)$.

2. En déduire que $\mathbb{E}(R_n) = o(n)$ pour n tendant vers $+\infty$.

3. Montrer que si X admet une espérance, on a même $\mathbb{E}(R_n) = O(\sqrt{n})$. *Indication : Markov.*

Exercice 234 (Identités de Wald)

Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 1, X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 1.

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S_N)$.

2. Calculer $\mathbb{V}(S_N)$, en supposant que X et N ont un moment d'ordre 2.

Exercice 235 (Lemme de Sperner)

Soient $A_1, \dots, A_p$ des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ deux à deux non incluses l'une dans l'autre. On note σ une permutation aléatoire uniforme de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note E_i l'événement " $A_i = \{\sigma(x) \mid 1 \leq x \leq |A_i|\}$ ".

1. Montrer en utilisant les E_i que :

$$\sum_{i=1}^p \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$$

2. En déduire que $p \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Est-ce optimal ?

Exercice 236 (Problème du collectionneur)

On considère un collectionneur de vignettes. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vignettes. À chaque achat, le collectionneur gagne une vignette parmi les n possibles, de manière aléatoire uniformément.

On note T_n le nombre moyen d'achat à effectuer pour obtenir les n vignettes distinctes.

1. Montrer que T_n est presque sûrement finie.
2. Montrer que :

$$\mathbb{E}(T_n) = n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

3. Combien faut-il faire d'enfants en moyenne pour avoir au moins une fille et un garçon ?

Exercice 237 (Croissance dans le graphe aléatoire)

Soit $\mathcal{G}_{n,p}$ le graphe aléatoire d'Erdős-Rényi.

Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{G}_{n,p} \text{ est connexe})$ est une fonction croissante de p .

Exercice 238 (Connexité dans le graphe aléatoire)

Soit $\mathcal{G}_{n,p}$ le graphe aléatoire d'Erdős-Rényi.

1. Montrer qu'on a :

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_{n,p} \text{ n'a aucun sommet isolé}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1-p)^{\binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}}$$

2. En déduire que si $p_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{c}{n}$ où $c \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_{n,p_n} \text{ n'a aucun sommet isolé}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-e^{-c}}$$

3. Conclure que sous les mêmes hypothèses :

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_{n,p_n} \text{ est connexe}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-e^{-c}}$$

4. Généraliser les questions 1 et 2 pour donner une expression asymptotique de la loi du nombre de sommets isolés dans $\mathcal{G}_{n,p_n}$.

Exercice 239 (Le graphe aléatoire infini)

On considère un ensemble infini dénombrable V , et pour tous $x, y \in V$, soit $X_{\{x,y\}}$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, ces variables étant choisies mutuellement indépendantes. On considère le graphe aléatoire G d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arrêtes donné par les parties $\{x, y\}$ telles que $X_{\{x,y\}} = 1$. Soit G' une copie de G indépendante de G .

Montrer que G et G' sont presque sûrement isomorphe.

Exercice 240 (Loi uniforme sur $\mathbb{N}$)

Montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, on ait $\mathbb{P}(n|X) = \frac{1}{n}$.

Exercice 241 (Probabilité pour deux nombres d'être premiers entre eux)

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X \wedge Y = 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \varphi(i) = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + 1 \right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

où μ est la fonction de Moebius, définie par $\mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r$ si les p_i sont des premiers distincts, et $\mu(m) = 0$ si m est divisible par le carré d'un nombre premier.

2. En déduire que $\mathbb{P}(X \wedge Y = 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{\pi^2}$.

Exercice 242 (Grand déterminant par la méthode probabiliste)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$ et telle que :

$$\det(M) \geq \sqrt{n!}$$

Exercice 243 (Un problème d'optimisation par la méthode probabiliste)

Soient E un espace euclidien, $p_1, \dots, p_n$ des points de E . Montrer qu'il existe un choix de signes $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que le point $p = \varepsilon_1 p_1 + \dots + \varepsilon_n p_n$ vérifie :

$$\|p\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|p_i\|^2}$$

Exercice 244 (Moments d'une variable aléatoire bornée)

Soit X une variable aléatoire presque sûrement à valeur dans le segment $[a, b]$ où $a \leq b$ sont deux réels. Trouver le maximum possible pour $\mathbb{V}(X)$ et donner le cas d'égalité.

Exercice 245 (Minoration d'une espérance)

Soient X, Y deux variables aléatoires strictement positives indépendantes de même loi. Montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$$

Exercice 246 (Concentration d'une marche aléatoire)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Exercice 247 (Théorème de Polya)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $e = (e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, et soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq d\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On note N la variable aléatoire donnant le nombre d'entiers $n \geq 1$ tels que $S_n = 0$, et $p = \mathbb{P}(N \neq 0)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{+\infty} p^i$. En déduire que $p = 1$ si et seulement si $\mathbb{E}(N) = +\infty$.

2. Calculer $\mathbb{E}(N)$ dans les cas $d = 1$ puis $d = 2$, et en déduire que dans ces deux cas, $p = 1$. On dit que la marche aléatoire revient presque sûrement à l'origine.

Exercice 248 (Triche uniforme)

Est-il possible de piper deux dés de sorte que leur somme suive la loi uniforme sur $\llbracket 1, 12 \rrbracket$?

Exercice 249 (Un calcul d'espérance)

Soient $n \geq m$ des entiers, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_m}{X_1 + \dots + X_n}\right)$$

Exercice 250 (Moments du nombre de points fixes)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. On note N le nombre de points fixes de σ .

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{E}(N(N-1)\dots(N-k+1)) = 1$$

2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(N^k)$ est le k -ième nombre de Bell, c'est à dire de nombre de partitions d'un ensemble à k éléments.

3. Montrer que N converge (quand $n \rightarrow +\infty$) en loi vers une loi que l'on déterminera.

Exercice 251 (Un résultat de concentration)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles bornées centrées et mutuellement indépendantes. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n \|X_k\|_\infty^2}\right)$$

Exercice 252 (Probabilité pour un grand cycle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. On note p_n la probabilité que σ ait un cycle de longueur $\geq \frac{n}{2}$. Montrer que $(p_n)_{n \geq 0}$ converge et calculer la limite.

Exercice 253 (La ruine du joueur)

Le joueur A commence avec un capital de a , le joueur B avec un capital de b . À chaque tour, jusqu'à ce qu'un joueur soit ruiné, A donne un euro à B avec probabilité p , et inversement avec probabilité $1 - p$. Calculer la probabilité que A soit ruiné. Que devient cette probabilité quand b tend vers $+\infty$?

Exercice 254 (En avion)

Un avion a 100 places. Le premier passager entre et prend une place au hasard. Les suivants prennent leur place si elle est disponible, et sinon prennent une autre place au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager prenne sa propre place ?

Exercice 255 (Modes de convergence)

Montrer que la convergence presque sûre implique la convergence en loi. Donner un contre-exemple pour la réciproque.

Exercice 256 (Série entière aléatoire)

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi géométrique de paramètre p . Que dire du rayon de convergence de la série entière aléatoire $\sum X_n z^n$?

Exercice 257 (Permutation aléatoire)

Soient $X_1, \dots, X_{n-1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. X_i est uniforme à valeurs dans $[i, n]$. Donner la loi de la permutation aléatoire :

$$(n, X_n) \cdots (1, X_1)$$

Exercice 258 (Probabilité d'inversibilité)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice aléatoire à coefficients choisis uniformément dans $\{0, 1\}$. Montrer que la probabilité que M soit inversible est minorée par une constante indépendante de n .

Exercice 259 (Matrice de Rademacher)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice aléatoire dont les coefficients suivent des lois de Rademacher mutuellement indépendantes. Soit p_n la probabilité que les colonnes de M soient orthogonales. Montrer que :

$$p_n \leq e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1))$$

Exercice 260 (Matrice circulante inversible)

Soit p un nombre premier et A la matrice aléatoire :

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_{p-1} \\ X_{p-1} & X_0 & \cdots & X_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_0 \end{pmatrix}$$

où les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

Exercice 261

Dans un village, il y a 100 maisons et 50 chemins. Chaque chemin relie une maison à une autre. Montrer qu'il est possible de former deux clans de 50 maisons de sorte qu'il existe au moins 25 chemins qui vont d'un clan à l'autre.

2.10 Équations différentielles

Exercice 262 (Flots de norme constante)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|$ la norme 2 usuelle sur $\mathbb{R}$.

1. À quelle condition les solutions de l'équation différentielle $X' = AX$ sont-elles toutes de norme constante ?
2. À quelle condition sont-elles toutes bornées ?

Exercice 263 (Formule de Campbell-Haussdorf à l'ordre 2)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A et B commutent avec $[A, B] = AB - BA$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $f(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A, B]}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[A^k, B] = kA^{k-1}[A, B]$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
3. En déduire que $e^{A+B} = e^A e^B e^{\frac{1}{2}[A, B]}$.

Exercice 264 (Dérivée antisymétrique)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A'(t) = A(t)^T A(t) - A(t)A(t)^T$$

Montrer l'existence de la limite suivante et la calculer :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(u) du$$

Exercice 265 (Polynôme caractéristique constant)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^0$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$$

Montrer que $\chi_{A(t)}$ est indépendant de t .

Exercice 266 (Lemme de Grönwall)

Soit I un intervalle réel non vide de $\mathbb{R}$ qui contient 0, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et $w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t \in I$, on a $f'(t) \leq f(t)w(t)$.

Montrer que, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(t) \leq f(0) \exp \left(\int_0^t w(u) du \right)$$

Exercice 267 (Lemme de Grönwall sur la trace)

Soit $C > 0$, et $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\text{Tr}(A'(t)) \leq -C \text{Tr}(A(t))$. Montrer que $A(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 268 (Sous-groupes à un paramètre)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les morphismes de groupes $f : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ qui sont continus.

Exercice 269 (Équations de Sturm-Liouville)

Soit $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.

1. Montrer que le wronskien d'un couple de solutions est constant.
2. Soient maintenant $q_1, q_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $q_1 \leq q_2$.

Soient y_1 une solution non nulle de $y'' + q_1 y = 0$, et de même pour y_2 et $y'' + q_2 y = 0$. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$ deux zéros consécutifs de y_1 . Montrer que y_2 s'annule dans $[a, b]$. On pourra considérer $y_1' y_2 - y_2' y_1$.

Exercice 270 (Équation $y'' + y = f$)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de $y'' + y = f$ admettant une limite en $+\infty$.

Exercice 271 (Lemme de Hochschild)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note V_f l'espace engendré par les fonctions $(x \mapsto f(x+a))$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer quelles sont les fonctions $f \in E$ telles que V_f soit de dimension finie. On trouve les fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Exercice 272 (Développement de la cotangente par une équation différentielle)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x-k}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et donner une expression de f' sous forme de somme d'une série de fonctions.

2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f . En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi \cotan(\pi x)$.

2.11 Calcul différentiel

Exercice 273 (Jacobienne antisymétrique)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe une base e de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les matrices des différentielles df_x pour $x \in \mathbb{R}^n$ sont toutes antisymétriques.

Montrer que f est une fonction affine.

Exercice 274 (Théorème spectral, preuve variationnelle)

Soit E un espace euclidien, S sa sphère unité et u un endomorphisme auto-adjoint de E .

1. Montrer que l'application $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est bornée sur S et y atteint un maximum en un point $x_0 \in S$.

2. Montrer que x_0 est un vecteur propre de u . En déduire le théorème spectral.

Exercice 275 (Principe de la moyenne pour les fonctions harmoniques)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\Delta f = 0$. On dit que f est harmonique. On pose pour tout $r \in \mathbb{R}$, tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et prouver que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0$$

2. En déduire que la fonction qui à $r \in \mathbb{R}$ associe :

$$\int_0^{2\pi} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) d\theta$$

est constante. Quelle est sa valeur ?

Exercice 276 (Naturalité du laplacien)

Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $D : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants homogène d'ordre

2. On suppose que pour toute isométrie u de $\mathbb{R}^n$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on a $D(f \circ u) = D(f)$.

Montrer que D est proportionnel au laplacien Δ .

Exercice 277 (Gradient du déterminant)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Calculer le gradient de l'application déterminant.

Exercice 278 (Distance à un compact convexe)

Soit E un espace muni d'une structure euclidienne, C un compact convexe de E . On note $d_C : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ l'application "distance à C ".

Montrer que d_C est différentiable sur $E \setminus C$.

Exercice 279 (Espaces tangents)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en l'identité.
2. Faire de même avec $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.