

Rapport de stage de recherche en Mathématiques

Ferdinand Jacobé de Naurois

Résumé

Ce rapport relate mon stage de Master 1 de Mathématiques, effectué au deuxième semestre de l'année scolaire 2023 - 2024 au Mathematical Institute de l'Université d'Oxford.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Ensembles sans-produit dans les groupes finis	2
1.1 Position du problème	2
1.2 Lien avec la théorie des représentations	3
1.3 Vers l'exposant optimal	5
1.4 Le cas des groupes $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$	8
2 Groupes de Lie compacts à haute entropie	9
2.1 Objectifs du projet et stratégie générale	9
2.2 Mesure des boules dans les groupes de Lie compacts	10
2.3 Applications aux groupes de haute entropie	13
3 Compléments	15
3.1 Limites de fonctions harmoniques	16
3.2 École d'été sur le thème "Symmetry and Randomness"	17
Conclusion	18
Remerciements	18

Introduction générale

Après avoir envisagé plusieurs pistes de recherches de stage, j'ai eu la chance de rencontrer Monsieur Emmanuel Breuillard au Collège de France à Paris, à l'occasion d'un colloque organisé en l'honneur de Jacques Tits. Monsieur Breuillard a accepté de superviser mon stage de deuxième année, qui a donc eu lieu au Mathematical Institute de l'Université d'Oxford, son laboratoire de rattachement. Le stage s'est déroulé officiellement de mi-février à début juin, mais s'est prolongé "en distanciel" comme nous le verrons plus loin. Je suis donc arrivé aux alentours du 12 février à Oxford, au Royaume-Uni. J'ai été immédiatement très bien accueilli par Madame Helen Stringer, qui m'a présenté le laboratoire, sa bibliothèque et les différents lieux de vie commune. J'ai rencontré Monsieur Breuillard quelques jours plus tard. À l'issue de ce premier entretien, nous sommes convenu d'un rendez-vous hebdomadaire pour se tenir au courant de l'avancement des projets en cours.

Le reste du temps, il était convenu que je travaille où je le souhaite, dans une des nombreuses bibliothèques auxquelles mon statut d'étudiant invité me donnait accès, ou dans les espaces communs du laboratoire.

Monsieur Breuillard m'a laissé choisir entre trois sujets d'étude qui lui semblaient adaptés.

Le premier concernait le dixième problème de Hilbert, et plus précisément la question suivante : existe-t-il un algorithme qui, étant données k matrices $A_1, \dots, A_k$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$, détermine s'il existe des entiers $n_1, \dots, n_k$ non tous nuls tels que $A_1^{n_1} \dots A_k^{n_k} = I_k$?

Le second consistait en la lecture et la compréhension d'un article récent de Keevash, Lifschitz et Minzer [8] déterminant pour n suffisamment grand les parties du groupe alterné $\mathcal{A}_n$ maximales sans produits (une partie S d'un groupe G est dite "sans produit" si pour tous $s, t \in S$, $st \notin S$).

Le troisième portait sur l'alternative de Tits en théorie des groupes.

J'ai fait le choix de m'intéresser au deuxième sujet. Les deux ou trois premières semaines du stage ont donc été dédiées à la compréhension de cet article de Keevash, Lifschitz et Minzer. Pour cela, j'ai dû apprendre beaucoup de théorie des représentations des groupes finis. Une fois ceci fait, nous avons envisagé de tâcher d'utiliser les méthodes de cet article pour obtenir des résultats similaires pour les groupes simples $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, qui pour n grands s'avèrent avoir une structure très similaire à celle de $\mathcal{A}_n$. Ce travail est l'objet de la première partie de ce rapport.

Ceci nous a occupé quelques semaines, jusqu'à ce que j'apprenne par le biais d'un étudiant de Monsieur Keevash (également rattaché au Mathematical Institute) que les auteurs de l'article que nous avions étudié auraient également envisagé cette direction. Nous avons donc décidé de leur céder la place, non seulement par politesse mais également parce qu'en tant qu'auteurs de ces méthodes, ces chercheurs disposaient naturellement d'une grande longueur d'avance sur notre compréhension des phénomènes en jeu.

Après quelques jours d'incertitude concernant la direction à prendre, Monsieur Breuillard m'a proposé de revenir sur un brouillon d'article qu'il avait écrit avec Gilles Pisier quelques années auparavant, sans pour autant mener à bien le projet. L'objectif était donc dans un premier temps de comprendre ces mathématiques, puis dans un second temps d'isoler les points importants de cette étude, de ré-écrire, vérifier, simplifier les preuves au possible, et de combler les éventuelles lacunes, jusqu'à obtenir un article publiable. Ce second projet, portant sur les groupes de Lie compacts à haute entropie métrique, sera le sujet de la deuxième partie de ce texte.

Par ailleurs, au cours de ce stage, Monsieur Breuillard m'a suggéré quelques problèmes annexes que j'évoquerai dans la troisième partie de ce rapport. L'un d'eux fait l'objet d'un article en cours de correction, que nous espérons pouvoir publier sous peu. À l'issue de ce stage, j'ai également eu l'opportunité d'assister à une école d'été organisée par Emmanuel Breuillard et Matthew Tointon à Bristol durant le mois de juillet, sur le thème "Symmetry and Randomness". Il en sera fait mention dans la dernière partie de ce rapport.

1 Ensembles sans-produit dans les groupes finis

Le premier projet entrepris dans le cadre de mon stage de recherche a été de comprendre l'article [8] donnant une description explicite des ensembles sans produits maximaux dans le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ pour n assez grand. Pour ce faire, il a été nécessaire d'élargir mes connaissances en théorie des représentations des groupes finis. J'ai donc fait un usage assez intensif du livre de Fulton et Harris, notamment pour comprendre la classification des représentations des groupes symétriques. Cela a également été l'occasion pour moi de rédiger des notes détaillées de théorie des représentations des groupes finis, et en particulier des représentations de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.

J'ai également entrepris de lire dans un premier temps l'article [4] de Sean Eberhard qui fournit une borne de l'ordre de $\frac{\log(n)^{7/2}}{\sqrt{n}}$ sur la mesure des parties sans produits dans $\mathcal{A}_n$, ce qui est le bon ordre de grandeur à un facteur logarithmique près. Enfin, pour comprendre l'article [8] qui était le principal sujet de mon stage, il a fallu me familiariser avec la notion d'hypercontractivité, et en particulier avec les inégalités d'hypercontractivité sur le groupe symétrique développées dans le très récent article [9] auquel j'ai naturellement été amené à me référer régulièrement. Nous dirons seulement quelques mots de cette théorie au cours de la section 1.3.

1.1 Position du problème

Énonçons maintenant les définitions principales nécessaires à la bonne compréhension des enjeux de cet article, et tâchons de donner un peu de contexte et de motivation à cette étude.

Définition 1.1. Soit G un groupe, S une partie de G . On dit que S est "sans produit" si et seulement si pour tous $s, t \in S$, $st \notin S$.

L'objectif de [8] est de comprendre l'asymptotique du maximum des cardinaux des parties sans produit du groupe alterné $\mathcal{A}_n$ pour n tendant vers $+\infty$.

Expliquons dans un premier temps pourquoi $\mathcal{A}_n$ est un groupe naturel dans lequel étudier cette question. Tout d'abord, ce même problème dans les groupes abéliens finis est essentiellement compris. À ce sujet, on

pourra consulter [7]. Il faut donc se pencher sur des groupes non commutatifs.

Sans doute un des modèles les plus simples de groupes abéliens est celui du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. Cependant, la présence d'un sous-groupe de petit indice dans ce groupe (à savoir $\mathcal{A}_n$) rend l'étude triviale : le cardinal maximal d'une famille sans produit dans $\mathcal{S}_n$ est atteint par l'ensemble des permutations impaires. Pour pallier ce problème, on se sépare de ces permutations impaires qui posent problème, ce qui justifie le fait qu'on se concentre sur $\mathcal{A}_n$.

Notons μ la mesure uniforme sur $\mathcal{A}_n$. La mesure d'une partie de S de $\mathcal{A}_n$ désignera toujours le nombre $\mu(S)$.

Commençons par donner des exemples d'ensembles sans produits de grands cardinaux dans $\mathcal{A}_n$.

Définition 1.2. Si l'on se donne un élément $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et une partie $I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$, on définit l'ensemble :

$$F_I^x = \{\sigma \in \mathcal{A}_n \mid \sigma(x) \in I, \sigma(I) \cap I = \emptyset\}$$

L'ensemble F_I^x est sans produit : en effet, un produit de deux éléments de F_I^x envoie x hors de I . De plus, on peut estimer le cardinal de F_I^x , où $k = |I|$ tend vers $+\infty$:

$$\frac{|F_I^x|}{n!} = \frac{k}{n} \frac{(n-k)! \cdot (n-k-1)!}{(n-2k)! \cdot n!} = \frac{k}{n} \exp\left(\frac{-k^2}{n} + o\left(\frac{k^2}{n}\right)\right)$$

On maximise le membre de gauche en prenant k de l'ordre de $\sqrt{n}$, et on trouve alors que $\mu(F_I^x)$ est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ceci, associé au fait que les F_I^x sont manifestement des ensembles sans produit maximaux pour l'inclusion, suggère la conjecture suivante :

Question : Est-il vrai que les ensembles sans produit dans $\mathcal{A}_n$ sont de mesure bornée par un $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$?

Cette conjecture naturelle est vraie, et c'est l'objet du très récent article [8]. De manière encore plus précise, les auteurs démontrent que pour n assez grand, toute partie sans produit de $\mathcal{A}_n$ maximale pour l'inclusion est un F_I^x ou bien l'ensemble des inverses des éléments d'un F_I^x .

Cependant, des résultats plus faibles étaient déjà connus avant sa parution. On citera à ce sujet les travaux pionniers de Timothy Gowers qui obtient dans [6] une borne en $\frac{1}{n^{1/3}}$, et quelques années plus tard les résultats de Sean Eberhard (voir [4]) qui atteint le bon ordre de grandeur à un facteur logarithmique près. Plus précisément, Eberhard parvient à montrer que toute partie sans produit de $\mathcal{A}_n$ est de mesure au plus $O(\frac{\log^{7/2}(n)}{\sqrt{n}})$.

Nous tâcherons plus loin de donner une idée de la manière dont fonctionnent ces arguments. En particulier, on re-prouvera entièrement dans ce texte la borne en $\frac{1}{n^{1/3}}$ de Gowers, ce qui sera l'occasion de se pencher sur les représentations des groupes symétriques, et d'expliquer la nature des améliorations apportées par les différents chercheurs qui suivirent.

1.2 Lien avec la théorie des représentations

Commençons par donner une méthode générale permettant de borner les cardinaux d'ensembles sans produit dans les groupes finis, qui repose sur la notion de groupe "quasi-aléatoires" introduite sous une forme différente de celle que nous utiliserons par Gowers dans [6]. Ce sera l'occasion de comprendre pourquoi les représentations d'un groupe sont d'une importance capitale dans la compréhension de la structure de ses parties sans produit.

Cette section est très librement inspirée de [4].

Fixons un groupe G , qui sera dans les applications pris égal au groupe alterné $\mathcal{A}_n$. On note μ la mesure uniforme sur le groupe G .

Le point de départ des articles [4] et [8] est l'idée d'une décomposition de Fourier des fonctions de $\mathbb{C}^G$. Notez qu'ici, on travaille bien avec toutes les fonctions de G dans $\mathbb{C}$ et pas seulement les fonctions centrales.

Définissons le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^G$ par la formule :

$$\forall f, g \in \mathbb{C}^G, \langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$$

Et notons $*$ l'opérateur de convolution des fonctions de $\mathbb{C}^G$, donné par :

$$\forall f, g \in \mathbb{C}^G, \forall x \in G, (f * g)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y) g(x - y)$$

Cet opérateur fait de $\mathbb{C}^G$ une algèbre associative unitaire, dont le neutre est $|G| \cdot 1_e$, e désignant le neutre de G . Notons qu'on a également une opération de multiplication point par point sur les fonctions de $\mathbb{C}^G$, qu'on notera $\cdot$ et qui fait également de $\mathbb{C}^G$ une algèbre. L'espace $\mathbb{C}^G$ est donc naturellement muni de deux structures d'algèbres, à savoir $(\mathbb{C}^G, *)$ et $(\mathbb{C}^G, \cdot)$.

Remarque 1.3. La raison pour laquelle ce langage est utile dans notre cadre est la suivante. Le nombre de solutions de l'équation $xy = z$ à inconnues dans une partie $S \subseteq G$ n'est autre que $|G|^3 \langle 1_S * 1_S, 1_S \rangle$, où 1_S désigne la fonction indicatrice de l'ensemble S .

Notons maintenant Ξ une famille totale de représentations irréductibles unitaires de G . Pour tout $\xi \in \Xi$, on note V_ξ l'espace hermitien sur lequel agit les $\xi(g)$, $g \in G$ et d_ξ sa dimension. On munit $\mathcal{L}(V_\xi)$ du produit hermitien de Hilbert-Schmidt, donné par $\langle u, v \rangle = \text{Tr}(uv^*)$ pour tous $u, v \in \mathcal{L}(V_\xi)$. Notons également pour tout $f \in \mathbb{C}^G$:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \xi(g) \in \mathcal{L}(V_\xi)$$

Alors, pour toutes fonctions $f, g \in \mathbb{C}^G$, on a les égalités :

$$\forall \xi \in \Xi, \widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \quad \text{et} \quad \langle f, g \rangle = \sum_{\xi \in \Xi} d_\xi \langle \hat{f}(\xi), \hat{g}(\xi) \rangle$$

La première est une simple interversion de sommes, la seconde découle de la théorie des représentations des groupes finis (voir par exemple [5]). La raison de l'adoption de ce nouveau langage d'analyse de Fourier est le lemme suivant, qui découle de la remarque ci-dessus et des deux égalités qui précèdent.

Proposition 1.4. Soit S une partie de G . Le nombre d'éléments $x, y, z \in S$ tels que $xy = z$ vaut :

$$|G|^3 \sum_{\xi \in \Xi} d_\xi \langle \widehat{1_S}(\xi)^2, \widehat{1_S}(\xi) \rangle$$

où 1_S désigne l'indicatrice de l'ensemble S .

Le corollaire utile dans le cadre de l'étude des ensembles sans produit est donc le suivant.

Corollaire 1.5. Soit S une partie de G . L'ensemble S est sans produit si, et seulement si :

$$\sum_{\xi \in \Xi} d_\xi \langle \widehat{1_S}(\xi)^2, \widehat{1_S}(\xi) \rangle = 0$$

Le terme correspondant à la représentation triviale $\xi = 1$ vaut toujours $\mu(S)^3$, où μ est la mesure uniforme sur G . Il s'avère être le terme dominant dans cette somme. Aussi, une stratégie convaincante pour montrer qu'une partie S n'est pas sans produit serait de montrer l'inégalité :

$$\sum_{\chi \neq \chi_0} d_\chi \cdot |\langle \widehat{1_S}(\chi)^2, \widehat{1_S}(\chi) \rangle| < \mu(S)^3$$

Tâchons donc de borner cette somme.

Lemme 1.6. Soit $R \subseteq \Xi$ un ensemble de représentations irréductibles. On note d la dimension minimale d'une représentation de R . On a alors pour toutes fonctions $f, g, h \in \mathbb{C}^G$:

$$\sum_{\xi \in R} d_\xi \cdot |\langle \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \hat{h}(\xi) \rangle| \leq \frac{\|f\|_2 \|g\|_2 \|h\|_2}{\sqrt{d}}$$

Démonstration. On conserve les notations de l'énoncé. Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in R} d_\xi |\langle \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \hat{h}(\xi) \rangle| &\leq \sum_{\xi \in R} d_\xi \cdot \|\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)\|_2 \cdot \|\hat{h}(\xi)\|_2 \leq \sum_{\xi \in R} d_\xi \cdot \|\hat{f}(\xi)\|_2 \cdot \|\hat{g}(\xi)\|_2 \cdot \|\hat{h}(\xi)\|_2 \\ &\leq \max_{\xi \in R} \|\hat{f}(\xi)\|_2 \cdot \sum_{\xi \in R} d_\xi \cdot \|\hat{g}(\xi)\|_2 \cdot \|\hat{h}(\xi)\|_2 \leq \max_{\xi \in R} \|\hat{f}(\xi)\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|h\|_2 \leq \frac{\|f\|_2 \|g\|_2 \|h\|_2}{\sqrt{d}} \end{aligned}$$

□

Définition 1.7. Soit G un groupe fini. On dit que G est " d -presque aléatoire" pour un entier $d \in \mathbb{N}^*$ si toutes les représentations irréductibles non triviales de G sont de dimension au moins d .

En appliquant le Lemme 1.6 et le Corollaire 1.5, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.8 (Gowers). Soit G un groupe d -presque aléatoire pour un entier $d \geq 1$. Alors, si S est une partie sans produit de G , on a : $\mu(S) \leq \frac{1}{d^{1/3}}$.

Démonstration. Soit $S \subseteq G$ telle que $\mu(S) > \frac{1}{d^{1/3}}$. Alors, par le Lemme 1.6 on a :

$$\sum_{\xi \in \Xi} d_\xi \cdot \langle \widehat{1_S}(\xi)^2, \widehat{1_S}(\xi) \rangle \geq \mu(S)^3 - \sum_{\xi \neq \xi_0} d_\xi \cdot |\langle \widehat{1_S}(\xi)^2, \widehat{1_S}(\xi) \rangle| \geq \mu(S)^3 - \frac{\mu(S)^{3/2}}{\sqrt{d}} > 0$$

et donc par le Corollaire 1.5, S n'est pas sans produit. □

Comme corollaire, on retrouve la borne de Gowers dans [6] en utilisant la classification des représentations de $\mathcal{A}_n$ (voir par exemple le Chapitre 5 de [5]) qui assure que pour n assez grand, la représentation irréductible non triviale de plus petite dimension de $\mathcal{A}_n$ est la représentation standard de dimension $n - 1$.

Corollaire 1.9 (Gowers). Pour n assez grand, toute partie sans produit de $\mathcal{A}_n$ est de mesure au plus $\frac{1}{(n-1)^{1/3}}$.

1.3 Vers l'exposant optimal

Les travaux d'Eberhard, puis de Keevash, Lifschitz et Minzer améliorent l'exposant $1/3$ jusqu'à atteindre $1/2$, qui est naturellement le meilleur exposant envisageable au vu des ensembles F_7^x . Reprenons l'expression du Corollaire 1.5 :

$$f(S) := \sum_{\xi \in \Xi} d_\xi \langle \widehat{1_S}(\xi)^2, \widehat{1_S}(\xi) \rangle$$

et tâchons d'expliquer (d'une manière bien entendu loin d'être exhaustive) de quelle manière ils y parviennent. Cette section est essentiellement tirée de [8].

La théorie des représentations des groupes symétriques (voir à nouveau [5]) nous assure que toutes les représentations de $\mathcal{A}_n$ qui ne sont ni la représentation standard de dimension $n - 1$ (qu'on notera σ), ni la représentation triviale sont de dimension $\geq (cn)^2$ pour une certaine constante universelle parfaitement explicite $c > 0$. Dès lors, appliquant le Lemme 1.6 on trouve :

$$f(S) \geq \mu(S)^3 + (n-1) \langle \widehat{1_S}(\sigma)^2, \widehat{1_S}(\sigma) \rangle - \frac{\mu(S)^{3/2}}{cn}$$

Pourvu qu'on s'intéresse à un ensemble S de mesure $s = \mu(S)$ telle que $sn^{2/3} \rightarrow +\infty$ (ce qui ne nuit pas à la généralité, puisqu'on souhaite montrer qu'un ensemble sans produit est de mesure au plus $O(\frac{1}{n^{1/2}})$), on a alors :

$$f(S) \geq s^3 \left(1 - \frac{1}{cs^{3/2}n}\right) + (n-1) \langle \widehat{1_S}(\sigma)^2, \widehat{1_S}(\sigma) \rangle = s^3 (1 - o(1)) + (n-1) \langle \widehat{1_S}(\sigma)^2, \widehat{1_S}(\sigma) \rangle$$

Si on fait maintenant l'hypothèse selon laquelle S est sans produit, on arrive donc à l'inégalité :

$$\langle \widehat{1_S}(\sigma)^2, \widehat{1_S}(\sigma) \rangle \leq -\frac{s^3}{n-1} + \frac{s^{3/2}}{cn(n-1)}$$

On arrive donc naturellement et sans idée réellement nouvelle au résultat suivant.

Lemme 1.10. *Soit S une partie sans produit de $\mathcal{A}_n$ telle que $s := \mu(S) \geq n^{-0.66}$. Alors, on a pour n assez grand :*

$$\langle \widehat{1_S}(\sigma)^2, \widehat{1_S}(\sigma) \rangle \leq -\frac{s^3}{2n-2}$$

Ici, comme toujours dans l'article [8], le " n assez grand" est parfaitement explicitable. Tout l'enjeu est donc de comprendre dans quels cas le terme

$$g(S) := \langle \widehat{1_S}(\sigma)^2, \widehat{1_S}(\sigma) \rangle$$

peut être fortement négatif. Il s'agit donc naturellement de commencer par expliciter ce terme. Ceci est fait dans [8]. Nous nous épargnerons les calculs à ce court rapport, et nous contenterons d'énoncer les quelques définitions résultats permettant d'interpréter le terme $g(S)$.

Définition 1.11. Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note μ_{ij} la mesure uniforme sur l'ensemble des permutations de $\mathcal{A}_n$ qui envoient i sur j . Si S est une partie de $\mathcal{A}_n$, on notera abusivement $\mu_{ij}(S)$ pour désigner $\mu_{ij}(\{s \in S \mid s(i) = j\})$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $a_{ij} = \frac{n-1}{n}(\mu_{ij}(S) - \mu(S))$. On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour toutes matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\langle B, C \rangle = \text{Tr}(BC^T)$.

Lemme 1.12. *Soit S une partie de $\mathcal{A}_n$. On a alors l'égalité :*

$$g(S) = \frac{\langle A^2, A \rangle}{4(n-1)^3}$$

Ainsi, il découle du Lemme 1.10 et du lemme ci-dessus le fait suivant

Proposition 1.13. *Si $S \subseteq \mathcal{A}_n$ est sans produit avec $s = \mu(S) \geq n^{-0.66}$, alors pour n assez grand on a :*

$$\langle A^2, A \rangle \leq -2(n-1)^2 s^3.$$

Tâchons de donner une interprétation heuristique de ce résultat obtenu par le calcul.

Pour cela, on commence par constater que le nombre a_{ij} pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ mesure en un certain sens la corrélation entre les événements $(\tau \in S)$ et $(\tau(i) = j)$, pour τ une permutation aléatoire de $\mathcal{A}_n$. En effet, si a_{ij} est positif, c'est que $\mu_{ij}(S) > \mu(S)$, et donc un élément de S aléatoire envoie i sur j plus souvent qu'un élément de $\mathcal{A}_n$ quelconque. Réciproquement, si $a_{ij} < 0$, c'est que $\mu(S) > \mu_{ij}(S)$, et donc savoir qu'une permutation τ est dans S diminue la probabilité qu'elle envoie i sur j .

Le nombre $\langle A^2, A \rangle$ est obtenu comme somme de termes de la forme $a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ pour $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour que $\langle A^2, A \rangle$ soit fortement négatif, il faut donc que de nombreux termes parmi ceux-ci soient négatifs. Pour que $a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ soit négatif, on peut par exemple espérer que $a_{ij}, a_{jk} > 0$ et $a_{ki} < 0$. Au vu du paragraphe qui précède, ceci signifie que les éléments de S envoient "souvent" i sur j et j sur k , mais "rarement" i sur k , ce qui est cohérent avec le fait que S soit sans produit ! Un tel raisonnement fonctionne également si on suppose que c'est a_{ij} , ou bien a_{jk} qui est négatif, ou bien que les trois sont négatifs.

Nous allons maintenant déduire de ce résultat la borne $\frac{1}{\sqrt{n}}$ au facteur logarithmique près. Des arguments nettement plus subtils sont nécessaires pour se séparer des logarithmes, aussi nous prenons le parti de ne pas les expliciter dans ce texte.

La stratégie adoptée par les auteurs de [8] pour analyser le terme $\langle A^2, A \rangle$ est la suivante. Ils découpent la matrice A en deux morceaux : $A = A_+ + A_-$, où A_- consiste uniquement en les coefficients négatifs de

A , avec des zéros partout ailleurs ; et A_+ est la matrice A dans laquelle on a remplacé tous les coefficients négatifs par des zéros. On a alors naturellement, en ne conservant que les termes négatifs :

$$\langle A^2, A \rangle \geq \langle A_- A_+, A_+ \rangle + \langle A_+ A_-, A_+ \rangle + \langle A_+ A_+, A_- \rangle + \langle A_- A_-, A_- \rangle$$

En écrivant que $|\langle MN, L \rangle| \leq \|M\| \cdot \|N\| \cdot \|L\|$ pour toutes matrices carrées M, N, L (c'est un calcul exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux reprises), et en observant que $\|A\|_2^2 = (2n-2)\mu(S) = (2n-2)s$ (un autre calcul assez épineux) on en déduit :

$$\langle A^2, A \rangle \geq -4(2n-2)s\|A_-\|_2$$

Ainsi, utilisant la Proposition 1.13 il vient :

Proposition 1.14. *Si $S \subseteq \mathcal{A}_n$ est sans produit avec $s = \mu(S) \geq n^{-0.66}$ et n est assez grand (indépendamment de S) alors $\|A_-\|_2 \geq \frac{s^2(n-1)}{4}$.*

Or, une conséquence des inégalités d'hypercontractivité prouvées dans [9] assure qu'on a nécessairement, dans tous les cas :

$$\|A_-\|_2 \leq \sqrt{ns} \log^{O(1)} \left(\frac{1}{s} \right) \quad (*)$$

Et donc dans le contexte de la proposition ci-dessus, on obtient bien $s \leq \frac{\log(n)^{O(1)}}{\sqrt{n}}$ qui est, au facteur logarithmique près, la borne optimale. Bien entendu, pour que la preuve soit complète, il reste à comprendre l'origine de l'inégalité (*) ci-dessus. Dans le paragraphe suivant, nous donnons simplement quelques idées de comment fonctionne la théorie de l'hypercontractivité sur le groupe $\mathcal{S}_n$ dans notre contexte très spécifique. Cette théorie est développée de manière systématique dans [9].

L'hypercontractivité dans les groupes symétriques.

En suivant le paradigme exposé dans la section 1.2 ci-dessus, on peut décomposer toute fonction $f : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{C}$ sous la forme $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$, où f_i est ce qu'on appelle la partie "de degré i " de f , par analogie avec la décomposition de toute fonction $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rightarrow \mathbb{C}$ comme une somme de polynômes homogènes de degrés $i = 0, 1, \dots, n$. f_i vit dans un espace V_i , les V_i étant deux à deux orthogonaux. Ici, f_0 est la fonction constante égale à la moyenne de f , tandis que f_1 correspond à la partie de f "visible sur la représentation standard σ ", c'est à dire telle que $\hat{f}_1(\sigma) = \hat{f}(\sigma)$ et $\hat{f}_1(\rho) = 0$ si $\rho \neq \sigma$. f_1 est appelée la "partie linéaire" de f , et f est "linéaire" si et seulement si $f = f_1$.

Il se trouve qu'alors, prenant $f = 1_S$, les coefficients de la matrice A apparaissant ci-dessus sont à peu de chose près les coefficients de f_1 dans une famille génératrice canonique $\mathcal{G}$ de l'espace des fonctions linéaires. Ainsi, borner $\|A\|_2$ revient à borner $\|f_1\|_2$, tandis que borner $\|A_-\|_2$ revient à borner la norme 2 d'une version tronquée de f_1 , qu'on appellera f_1^r . La borne obtenue sur f_1 est trop faible pour donner une inégalité de l'ordre de (*) (on obtient $\sqrt{s}$ au lieu de $s \log(1/s)^{O(1)}$), ce qui explique qu'on s'intéresse à f_1^r . Pour cela, on dispose de deux informations : f_1^r est linéaire, et étant une version "tronquée" de f_1 (on ne précise pas ici ce que cela signifie), elle n'admet pas de petits ensembles sur lesquels elle s'éloigne très fortement de sa moyenne : c'est ce qu'on appelle une fonction globale. Or, la théorie de l'hypercontractivité sur $\mathcal{S}_n$ (ou $\mathcal{A}_n$) développée dans [9] fournit comme principal résultat des bornes sur les normes de fonctions globales : une fonction linéaire globale ne peut pas avoir une trop grosse norme. Utilisant ces résultats presque comme une boîte noire, on obtient alors les bornes souhaitées sur $\|f_1\|_2$ qui se transposent en la borne (*) sur $\|A_-\|_2$.

Élimination du logarithme au numérateur.

Ainsi, on a vu que les ensembles sans produits de $\mathcal{A}_n$ sont de mesure au plus $\frac{\log(n)^{O(1)}}{\sqrt{n}}$. Pour se séparer du logarithme au numérateur, les auteurs de [8] utilisent un raisonnement sensiblement similaire, mais nettement plus technique. Tâchons d'en donner rapidement un aperçu. Tout d'abord, le découpage en $A = A_+ + A_-$ ne suffit plus. Il faut alors introduire une décomposition sous la forme $A = A_{\text{struc}} + A_{\text{rand}} + A_-$, où A_- contient les coefficients négatifs de A , A_{struc} ceux $> \varepsilon$ pour un certain paramètre ε , et A_{rand} ceux dans $[0, \varepsilon]$.

Partant ensuite de la Proposition 1.13 et bornant $\|A_-\|_2$ et $\|A_{\text{rand}}\|$ en appliquant les inégalités de [9], ils en déduisent alors qu'un des termes $\langle A_- A_{\text{struct}}, A_{\text{struct}} \rangle, \langle A_{\text{struct}} A_-, A_{\text{struct}} \rangle, \langle A_{\text{struct}} A_{\text{struct}}, A_- \rangle$ est fortement négatif. On cesse maintenant de quantifier ce que cela veut dire.

Supposons par exemple que $\langle A_{\text{struct}} A_-, A_{\text{struct}} \rangle$ est fortement négatif (le raisonnement est similaire dans le cas où c'est le cas d'un des deux autres termes). Cela signifie qu'il y a beaucoup de $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $a_{ij}, a_{ik} > \varepsilon$ et $a_{jk} < 0$. Plus précisément, si S est sans produit avec $s \geq n^{-0.66}$, on arrive tous calculs faits à :

$$-\Theta(n^2 s^3) \geq \langle A_{\text{struct}} A_{\text{struct}}, A_- \rangle = \sum_{a_{ij}, a_{jk} > \varepsilon, a_{ik} < 0} a_{ij} a_{jk} a_{ik} \geq -s \cdot \sum_{a_{ij}, a_{ik} > \varepsilon} a_{ij} a_{ik}$$

Et donc, notant $L(i)$ l'ensemble des $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $a_{ij} > \varepsilon$ et $l(i) = \sum_{j \in L(i)} a_{ij}$, ceci se simplifie en :

$$\sum_{i=1}^n l(i) \geq \text{cste} \cdot ns$$

Notons ici que $l(i)$ mesure en quelque sorte la corrélation entre S et l'ensemble des permutations envoyant i dans $L(i)$. De l'inégalité ci-dessus, on déduit alors qu'un des $l(i)$ se doit d'être grand, et donc il existe i tel que S est fortement corrélé à l'ensemble $F_{L(i)}^i$.

On sent donc que l'on se rapproche du théorème principal de [8] qui affirme que, pour n assez grand, les ensembles sans produit de $\mathcal{A}_n$ maximaux sont les F_I^x . Il reste à ce stade là encore quelques points assez techniques à régler, et un gros travail de quantification des heuristiques ci-dessus pour obtenir le résultat en question. Nous ne reproduirons pas ces détails dans ce rapport, faute de place.

1.4 Le cas des groupes $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$

Après avoir étudié l'article [8], Monsieur Breuillard et moi-même avons décidé d'essayer d'adapter les méthodes utilisées aux groupes simples linéaires de type $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ pour $n \geq 1$ et q une puissance d'un nombre premier. Nous donnerons dans ce paragraphe un aperçu des tentatives effectuées dans cette optique, et des difficultés rencontrées dans ces recherches.

Pour comprendre les gros ensembles sans produit dans $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, au vu du Lemme 1.6 et du Corollaire 1.5, il s'agit de comprendre les représentations de petite dimension de $G = \text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$. Il se trouve que (voir par exemple [10], section 4.3) la représentation de plus petite dimension de $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ est donnée par l'action sur les $\frac{q^n-1}{q-1}$ droites de $\mathbb{F}_q^n$, et est donc de dimension $\frac{q^n-q}{q-1}$.

Le Théorème 1.8 assure donc que les ensembles sans produit dans $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ sont de mesure bornée par $\left(\frac{q-1}{q^n-q}\right)^{\frac{1}{3}}$. Ceci est loin d'être suffisant, car on peut construire des ensembles sans produit dont la mesure dans $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ est de l'ordre de $q^{-\frac{n}{2}}$, sur le modèle des F_I^x . Plus précisément, étant donné une droite d , et un sous-espace W de $\mathbb{F}_q^n$ en somme directe avec d , l'ensemble G_W^d des éléments de $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ qui envoient d dans W et W dans un espace en somme directe avec W voit son cardinal maximisé quand $\dim(W)$ est proche de $\frac{n}{2}$, et a alors une mesure de l'ordre de $q^{-\frac{n}{2}}$. Il s'agit donc, comme dans le cas de l'amélioration de [8] sur le résultat de [6], de combler l'espace entre la borne inférieure en $q^{-\frac{n}{2}}$ et la borne supérieure $q^{-\frac{n}{3}}$.

Naturellement, disposant de deux paramètres n et q , on peut choisir de fixer n et faire varier q , ou bien l'inverse. Nous avons fait le choix de nous intéresser au cas où q reste fixé et n tend vers $+\infty$, pour des raisons que nous allons expliquer dans ce qui suit. Adaptant les arguments du Théorème 1.8 et sachant qu'on cherche à montrer que tout ensemble sans produit est de mesure bornée par $q^{-\frac{n}{2}}$, on constate que les seules représentations à étudier sont celles de dimension au plus $q^{\frac{3n}{2}}$.

Prenant n fixé petit, par exemple $n = 2$, les seules représentations à considérer sont donc celles de dimension au plus q^3 . Or, $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ a de nombreuses représentations dont la dimension a pour ordre de grandeur q ou q^2 (voir par exemple à ce sujet le chapitre 5 de [5]). Cela nous impose donc d'étudier de nombreuses représentations différentes.

En revanche, dans le cas où on fixe par exemple $q = 2$ et où on laisse varier n , les représentations à étudier sont celles de dimension au plus $2^{\frac{3n}{2}}$. Or, dans [10], section 4.3, on constate que la représentation triviale et la représentation par action sur les droites sont (pour n grand) les seules représentations de dimension $\leq 2^{\frac{3n}{2}}$. Ainsi, dans le cas de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_2)$, on n'a qu'une seule représentation à étudier, à savoir la représentation

"standard" σ obtenue par action sur les droites de $\mathbb{F}_2^n$ et de dimension $2^n - 2$.

En adaptant alors les arguments utilisés pour démontrer la Proposition 1.14, nous sommes alors parvenus à obtenir le résultat analogue suivant pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$.

Proposition 1.15. *Si $S \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ est sans produit avec $s := \mu(S) \geq 2^{-0.66n}$, alors pour n assez grand on a :*

$$\|A_-\|_2 \geq \frac{2^n \cdot s^2}{10}$$

Pour conclure que $s \leq n^{O(1)} \cdot 2^{-n/2}$, qui serait l'analogue pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ du résultat principal de [4], on a donc besoin d'une inégalité similaire à l'inégalité d'hypercontractivité (*) ci-dessus, du type :

$$\|A_-\|_2^2 \leq 2^n s^2 n^{O(1)} \quad (**)$$

Malheureusement pour nous, la théorie des inégalités d'hypercontractivité sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ semble nettement moins développée que sur $\mathcal{S}_n$, et nous ne disposons pas immédiatement d'une telle inégalité. Nous avons alors tenté d'adapter les inégalités connues sur $\mathcal{S}_n$ en des inégalités sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$, en utilisant par exemple le plongement naturel de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ dans le groupe symétrique sur les $2^n - 1$ points non nuls de $\mathbb{F}_2^n$. Ces tentatives n'ont pas été concluantes immédiatement, et ont été coupées net par un événement inattendu.

C'est en effet à peu près à cette période là que j'ai rencontré Anubhab Ghosal, un étudiant en Master 2 à l'université d'Oxford en stage de recherche avec Peter Keevash, un des auteurs de [8]. Anubhab m'a alors appris que les auteurs de [8] envisageaient d'adapter leurs méthodes pour $\mathcal{A}_n$ aux groupes linéaires, c'est à dire de faire exactement ce qui nous occupait. Après concertation avec Monsieur Breuillard, nous avons alors décidé de laisser de côté ce projet pour l'instant, quitte à y revenir plus tard quand nous aurions une idée plus précise des choses qui restaient à faire et quand la théorie de l'hypercontractivité sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ serait plus développée.

2 Groupes de Lie compacts à haute entropie

S'en sont suivis quelques jours de battement, le temps de retrouver un projet principal sur lequel travailler. Cet objectif s'est présenté sous la forme d'un brouillon d'article écrit par Monsieur Breuillard et Gilles Pisier et repris durant l'été 2023.

Cet article avait pour objectif de caractériser les groupes de Lie compacts ayant une grande entropie métrique comme ceux contenant un sous-groupe unitaire de rang élevé. Pour comprendre dans un premier temps les objectifs de ce texte, et les idées qui le composaient, il a été nécessaire pour moi d'apprendre à nouveau beaucoup de théorie des représentations, mais cette fois-ci des groupes de Lie compacts. En particulier, j'ai été amené plus tard à faire un usage intensif de la formule d'intégration de Weyl sur les groupes de Lie compacts. À ce sujet, j'ai commencé par lire une grande partie de [1] et [11].

Une fois ceci fait, j'ai commencé à étudier le brouillon fourni par Monsieur Breuillard, brouillon dont nous avons discuté de manière hebdomadaire durant le reste du stage. Nous avons amélioré, simplifié ou corrigé certaines preuves, ajouté de nouveaux résultats et du contexte, et remanié la structure générale de ce projet d'article pour y faire apparaître de manière plus centrale les nouveaux ajouts. Le contenu de ce texte sera détaillé plus précisément dans le reste de cette section.

Cette deuxième partie de mon stage a donc été nettement plus dirigée vers la recherche que la première, dont le principal objectif restait la compréhension de [8]. Cette complémentarité entre ces deux moitiés de mon stage s'est révélée avec le recul très bénéfique, me permettant ainsi d'appréhender deux des principales activités de la vie de chercheur : la compréhension des mathématiques produites par ses pairs, et la réflexion sur ses propres projets de recherche.

2.1 Objectifs du projet et stratégie générale

L'heuristique guidant cette deuxième moitié de stage est la suivante. Considérons un groupe de Lie compact G , sur lequel on place une distance d invariante sous l'action de G à gauche et à droite. On peut alors

naturellement définir l'entropie métrique de l'espace métrique G , comme :

$$\log(N_d(G, \varepsilon))$$

où $N_d(G, \varepsilon)$ est le nombre de boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir G et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre fixé, disons par exemple $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Ce que l'on démontre est que, si l'entropie métrique de G est grande (tout ceci sera quantifié plus tard), alors G est proche d'être un groupe unitaire. Plus précisément, G contient un groupe unitaire de rang élevé (également quantifié dans la suite).

En se donnant un objectif un peu plus ouvert, on peut donc tâcher de déduire du fait que G a une grande entropie des informations sur la structure de G . Il s'agit donc de borner supérieurement l'entropie métrique de G . Or, un argument classique qu'on ne reproduira pas ici permet de relier cette entropie métrique à la mesure de Haar des boules, dans le cas où la distance est invariante par l'action de G sur lui-même. On notera toujours μ la mesure de Haar sur G .

Lemme 2.1. *Soit G un groupe de Lie compact, et d une distance invariante par l'action de G sur lui-même par translation à gauche (ou à droite). Alors, on a :*

$$\mu(B_d(1, \varepsilon))^{-1} \leq N_d(G, \varepsilon) \leq \mu\left(B_d\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{-1}$$

où $B_d(1, \varepsilon)$ est la boule ouverte de rayon ε centrée en 1.

Ainsi, borner supérieurement l'entropie métrique de G revient à borner inférieurement la mesure de Haar d'une boule de rayon ε .

Précisons maintenant quelles distances nous allons utiliser.

Définition 2.2. Soit V un espace hermitien. Pour tout $u \in \mathcal{L}(V)$ on note $|u|$ la racine carrée hermitienne positive de uu^* . $\rho(|u|)$ désigne la plus grande valeur propre de $|u|$. On définit alors :

$$\forall p \in [1, +\infty[, \|u\|_p = \text{Tr}\left(\frac{|u|^p}{\dim(V)}\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \rho(|u|)$$

Il est bien connu que les $\|\cdot\|_p$ pour $p \in [1, +\infty]$ définissent des normes sur $\mathcal{L}(V)$.

Définition 2.3. Soit G un groupe de Lie semi-simple compact, et $\pi : G \rightarrow U(V)$ une représentation unitaire de G , où V est un espace hermitien. Soit $p \in [1, +\infty]$. La semi-distance $d_{\pi,p}$ est définie sur G par la formule :

$$\forall g, h \in G, d_{\pi,p}(g, h) = \|\pi(g) - \pi(h)\|_p$$

c'est une semi-distance sur G invariante par l'action de G sur lui-même par translation à gauche et à droite. C'est même une distance dès lors que π est fidèle.

Fixons donc dès maintenant une représentation unitaire (π, V) de G dont on note d_π la dimension. Pour tout $u \in \mathcal{L}(V)$ et tout $p \in [1, +\infty]$, on remarque que $\|u\|_p \leq \|u\|_\infty$, et donc pour tout $\varepsilon > 0$, on a avec des notations évidentes : $B_{\pi,\infty}(1, \varepsilon) \subseteq B_{\pi,p}(1, \varepsilon)$. Ainsi, pour borner inférieurement la mesure des boules $B_{\pi,p}(1, \varepsilon)$, il suffit de le faire pour $p = \infty$. Ce travail a été l'objet de nombreux tâtonnements. Dans la section suivante, nous énoncerons et démontrerons quelques-uns des résultats obtenus dans cette direction.

2.2 Mesure des boules dans les groupes de Lie compacts

Avant de pouvoir énoncer nos résultats, il convient de faire quelques rappels sur les groupes de Lie compacts. On pourra se référer à [11] et à [1] pour les démonstrations.

On considère un groupe de Lie semi-simple G , dont on note $Z(G)$ le centre et $\text{Lie}(G)$ l'algèbre de Lie associée. On fixe T un tore maximal de G , c'est à dire un sous-groupe abélien connexe maximal pour l'inclusion. On

note r le rang de G , c'est à dire la dimension de T . $\Phi \subseteq \text{Lie}(T)^*$ désigne l'ensemble des racines de l'algèbre de Lie de G , et $\Phi_+ \subseteq \Phi$ est un ensemble de racines positives (voir [11] pour les définitions de ces objets). La mesure de Haar normalisée sur G est notée m_G ou dg . La mesure de Haar normalisée sur T sera notée ds , et on fixe une mesure de Lebesgue dt sur $\text{Lie}(T)$. On considère la représentation adjointe $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\text{Lie}(G))$ de G dont le noyau est $Z(G)$, qu'on rend unitaire par le choix d'un produit scalaire adapté sur $\text{Lie}(G)$. Notons maintenant que par définition, on a pour tout $t \in \text{Lie}(T)$:

$$d_{\text{Ad},\infty}(e^t, 1) = \max_{\alpha \in \Phi} |e^{2\pi i \alpha(t)} - 1| = \max_{\alpha \in \Phi} 2|\sin(\pi \alpha(t))|$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit les parties suivantes de $\text{Lie}(T)$:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \{t \in \text{Lie}(T) \mid \forall \alpha \in \Phi, |\alpha(t)| < \varepsilon\} \\ L_G &= \ker(\exp) \subseteq \{t \in \text{Lie}(T) \mid \forall \alpha \in \Phi, \alpha(t) \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Notons que si le centre de G est trivial, alors G peut être identifié avec $\text{Ad}(G)$ et l'inclusion ci-dessus est une égalité.

On peut maintenant énoncer notre premier résultat concernant la mesure des boules, dans le cas où $\pi = \text{Ad}$.

Proposition 2.4. *Soit G un groupe de Lie compact connexe dont le centre est discret. On considère la constante suivante :*

$$\mathcal{A}_G = \frac{1}{(2\pi)^r \kappa |W|} \int_{U_1} \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(t)^2 dt$$

où κ est la mesure de Lebesgue d'un domaine fondamental de L_G , et W est le groupe de Weyl du système de racines Φ .

Alors, pour tout $\delta \in]0, 1[$, La mesure de Haar de la boule $B_{\text{Ad},\infty}(1, \delta)$ dans G vérifie :

$$e^{-\delta^2 \dim(G)} \leq \frac{m_G(B_{\text{Ad},\infty}(1, \delta))}{\mathcal{A}_G \cdot \delta^{\dim(G)}} \leq e^{\delta^2 \dim(G)}$$

Démonstration. Nous ne démontrerons dans ce texte que la borne inférieure, puisque c'est la seule qui nous sera utile dans la suite. Commençons par remarquer que comme le centre de G est discret, on peut déduire le résultat sur G de celui sur $G/Z(G)$. On peut donc se restreindre au cas où G est à centre trivial, c'est à dire au cas où Ad est une représentation fidèle. On fait cette hypothèse dans la suite.

Par la formule d'intégration de Weyl (voir [11], IV, 1.11) on obtient :

$$m_G(B_{\text{Ad},\infty}(1, \delta)) = \frac{1}{|W|} \int_T 1_{d_{\text{Ad},\infty}(s, 1) < \delta} D(s) ds$$

où $D(t)$ est défini par :

$$\forall t \in \text{Lie}(T), D(\exp(t)) = \prod_{\alpha \in \Phi^+} |e^{2\pi i \alpha(t)} - 1|^2$$

Or, $U_{\frac{1}{2}}$ est contenu dans un domaine fondamental pour le réseau L_G (car si $s, t \in U_{\frac{1}{2}}$ sont égaux modulo L_G , alors $|\alpha(t - s)| < 1$ et donc $\alpha(t) = \alpha(s)$ pour tout $\alpha \in \Phi$, d'où $t = s$). En descendant l'intégrale ci-dessus à l'algèbre de Lie de T , il vient alors :

$$m_G(B_{\text{Ad},\infty}(1, \delta)) \geq \frac{1}{|W| \cdot \kappa} \int_{U_{\frac{1}{2}}} 1_{d(e^t, 1) < \delta} D(e^t) dt$$

Considérons maintenant l'ensemble H des éléments de $U_{\frac{1}{2}}$ tels que $2|\sin(\pi \alpha(t))| \leq \delta$ pour tout $\alpha \in \Phi$, de sorte que l'intégrale ci-dessus se ré-écrit :

$$\frac{1}{|W| \cdot \kappa} \int_H \prod_{\alpha \in \Phi} 2|\sin(\pi \alpha(t))| dt$$

Maintenant, H contient clairement $U_{\frac{\delta}{2\pi}}$, et donc l'intégrale ci-dessus se minore par la même intégrale sur $U_{\frac{\delta}{2\pi}}$ au lieu de H . De plus, si $t \in U_{\frac{\delta}{2\pi}}$, alors $2|\sin(\pi\alpha(t))| > 2\pi\mu(\delta)|\alpha(t)|$, où $\mu(\delta) = \frac{2\sin(\frac{\delta}{2})}{\delta}$. Il en découle que :

$$m_G(B_{\text{Ad},\infty}(1,\delta)) > \frac{1}{|W| \cdot \kappa} \int_{U_{\frac{\delta}{2\pi}}} \prod_{\alpha \in \Phi} 2\pi\mu(\delta)|\alpha(t)| dt = \mathcal{A}_G \cdot \delta^{\dim(G)} \cdot \mu(\delta)^{2|\Phi^+|} \geq \mathcal{A}_G \cdot \delta^{\dim(G)} e^{-\delta^2 \dim(G)}$$

où la dernière inégalité utilise le fait que $\dim(G) \geq 2|\Phi^+|$ et $\delta \leq 1$. $\square$

Nous avons ensuite naturellement tâché d'estimer la constante $\mathcal{A}_G$, dont nous avons montré qu'elle a un comportement au plus exponentiel en $\dim(G)$. On peut alors en déduire le résultat plus explicite suivant.

Corollaire 2.5. Soit G un groupe de Lie compact connexe dont le centre est discret. Alors, on a pour tout $\delta \in]0, 1[$:

$$(e^{-3}\delta)^{\dim(G)} \leq m_G(B_{\text{Ad},\infty}(1,\delta)) \leq (e^3\delta)^{\dim(G)}$$

Passons maintenant au cas d'une représentation plus générale. À nouveau, nous cherchons une borne inférieure sur la mesure de $B_{\pi,\infty}(1,\delta)$ où π est une représentation de G .

Considérons donc une représentation π de G , qu'on suppose maintenant fidèle. On désigne par $\Pi_\pi \subseteq \text{Lie}(T)^*$ l'ensemble des poids de la représentation π , et on note $\lambda_\pi \in \text{Lie}(T)^*$ le plus haut poids de cette représentation (voir [1] pour les définitions relatives aux représentations des algèbres de Lie), et m_π le maximum de λ_π sur l'alcove $C \cap U_1$, où C désigne la chambre de Weyl relative à l'ensemble de racines positives Φ^+ . Posons également $M_\pi = \max(1, m_\pi, m_{\bar{\pi}})$.

Nous avons alors obtenu la borne inférieure suivante sur la mesure des boules pour la distance induite par la représentation π .

Proposition 2.6. Soit G un groupe de Lie compact connexe dont le centre est discret, et π une représentation fidèle de G . Alors, on a pour tout $\delta \in [0, 1]$:

$$m_G(B_{\pi,\infty}(1,\delta)) \geq \left(\frac{\delta}{4\pi^2 M_\pi} \right)^{\dim(G)}$$

Démonstration. Par la formule d'intégration de Weyl, et en utilisant à nouveau le fait que $U_{\frac{1}{2}}$ est contenu dans un domaine fondamental de L_G , il vient :

$$\begin{aligned} m_G(B_{\pi,\infty}(1,\delta)) &\geq \frac{1}{|W| \cdot \kappa} \int_{U_{\frac{1}{2}}} \prod_{\alpha \in \Phi^+} |2\sin(\pi\alpha(t))|^2 \cdot 1_{\forall \mu \in \Pi_\pi, |2\sin(\pi\mu(t))| \leq \delta} dt \\ &\geq \frac{1}{|W| \cdot \kappa} \int_{U_{\frac{1}{2}}} \prod_{\alpha \in \Phi^+} |2\sin(\pi\alpha(t))|^2 \cdot 1_{\forall \mu \in \Pi_\pi, |\mu(t)| \leq \frac{\delta}{2\pi}} dt \\ &\geq \frac{1}{\kappa} \int_{U_{\frac{1}{2}} \cap C} \prod_{\alpha \in \Phi^+} |4\alpha(t)|^2 \cdot 1_{\forall \mu \in \Pi_\pi, |\mu(t)| \leq \frac{\delta}{2\pi}} dt \end{aligned}$$

où C est une chambre de Weyl pour le système de racines positives Φ^+ . Maintenant, pour tout $t \in C$ on a $-\lambda_{\bar{\pi}} \leq \mu(t) \leq \lambda_\pi(t)$, et donc la condition $\forall \mu \in \Pi_\pi, |\mu(t)| \leq \frac{\delta}{2\pi}$ découle de la condition a priori plus faible $|\lambda_\pi(t)|, |\lambda_{\bar{\pi}}(t)| \leq \frac{\delta}{2\pi}$. On a donc :

$$m_G(B_{\pi,\infty}(1,\delta)) \geq \frac{4^{|\Phi|}}{\kappa} \int_{U_{\frac{1}{2}} \cap C} \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(t)^2 \cdot 1_{\max\{\lambda_\pi(t), \lambda_{\bar{\pi}}(t)\} \leq \frac{\delta}{2\pi}} dt$$

Or, si $t \in C \cap U_k$ pour un certain $k > 0$, on a $\frac{t}{k} \in U_1$ et donc $|\lambda_\pi(t)|, |\lambda_{\bar{\pi}}(t)| < M_\pi k$. En appliquant ceci avec $k = \frac{\delta}{2\pi M_\pi}$ on constate que $C \cap U_{\frac{\delta}{2\pi M_\pi}}$ est inclus dans l'ensemble des $t \in C \cap U_{\frac{1}{2}}$ tels que $\max\{\lambda_\pi(t), \lambda_{\bar{\pi}}(t)\} \leq \frac{\delta}{2\pi}$.

$\frac{\delta}{2\pi}$. L'inégalité ci-dessus devient donc :

$$\begin{aligned} m_G(B_{\pi,\infty}(1, \delta)) &\geq \frac{4^{|\Phi|}}{\kappa} \int_U \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(t)^2 \cdot dt = \frac{4^{|\Phi|} \cdot \delta^{\dim(G)}}{\kappa \cdot |W| \cdot (2\pi M_\pi)^{\dim(G)}} \int_{U_1} \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(t)^2 dt \\ &\geq \mathcal{A}_G \cdot (2\pi)^r 4^{|\Phi|} \left(\frac{\delta}{2\pi M_\pi} \right)^{\dim(G)} \geq \left(\frac{\delta}{4\pi^2 M_\pi} \right)^{\dim(G)} \end{aligned}$$

en reconnaissant l'expression de $\mathcal{A}_G$ et en utilisant la borne $\mathcal{A}_G \geq \frac{1}{(2\pi)^{\dim(G)}}$, qu'on ne démontre pas ici. $\square$

En associant le Lemme 2.1 à la Proposition 2.6, on obtient donc une borne sur l'entropie métrique de G suffisante pour ce que l'on veut en faire.

Corollaire 2.7. Soit G un groupe de Lie compact connexe dont le centre est discret, et π une représentation fidèle de G . Alors, pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $\delta \in]0, 1/3[$, on a :

$$\frac{\log(N_{\pi,p}(G, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} \leq 4 \dim(G) \log(4\pi^2 M_\pi)$$

Reste donc à contrôler le terme M_π . En utilisant la classification des groupes de Lie simples compacts, nous avons ensuite l'alternative suivante, qui fournit des informations très utiles dans le cas où M_π est grand. Ces résultats seront utiles dans la suite. Nous n'explicitons pas la preuve de cette assertion, qui repose sur une étude exhaustive de tous les systèmes de racines possibles.

Lemme 2.8. Soit G un groupe de Lie compact connexe dont le centre est discret, et π une représentation fidèle de G . Alors, au moins une des deux inégalités ci-dessous est vérifiée.

$$\dim(G) \leq 5d_\pi^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad M_\pi \leq 4$$

De plus, on a inconditionnellement $M_\pi \leq d_\pi^2$.

En réunissant ce lemme avec le Corollaire 2.7 ci-dessus, on arrive au résultat suivant qui sera presque le seul vraiment utile dans la suite.

Corollaire 2.9. Soit G un groupe de Lie compact connexe dont le centre est discret, et π une représentation fidèle de G . Si $\dim(G) > 5d_\pi^{\frac{2}{3}}$, alors :

$$\frac{\log(N_{\pi,p}(G, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} \leq 25 \dim(G)$$

2.3 Applications aux groupes de haute entropie

Nous allons maintenant déduire des résultats de la section précédente des théorèmes de la nature suivante : si G est un groupe de haute entropie métrique, alors il contient un sous-groupe isomorphe à un groupe unitaire de rang élevé. Pour ce faire, commençons par énoncer quelques faits généraux sur les représentations des groupes de Lie. On trouvera des démonstrations de ces faits classiques dans [11].

Soit G un groupe de Lie compact connexe. G se décompose alors sous la forme d'un produit commutatif : $G = G_1 \cdots G_k$, où les G_i sont des groupes de Lie compacts connexes "presque simples" c'est à dire dont les seuls sous-groupes normaux sont discrets. Le centre de G est alors l'intersection des G_i . Par ailleurs, toute représentation irréductible π de G se décompose sous la forme $\pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_k$, où π_i est une représentation irréductible de G_i pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Si G est presque simple, alors on a une notion de représentation "naturelle" de G , qui repose sur la classification des groupes presque simples. Par exemple, la seule représentation naturelle du groupe presque simple $SU_d(\mathbb{C})$ est donnée par l'application identité $SU_d(\mathbb{C}) \rightarrow U_d(\mathbb{C})$. Si G est un groupe de Lie compact connexe presque simple et π une représentation naturelle de G , alors on a $\frac{1}{3}d_\pi^2 \leq \dim(G) \leq d_\pi^2$, tandis que si π n'est pas naturelle alors $d_\pi \geq \frac{1}{3} \dim(G)$.

Cette notion de représentation naturelle fournit une borne plus forte sur l'entropie métrique d'un groupe pour une distance associée à une représentation non naturelle. Il suffit pour l'obtenir d'utiliser le Lemme 2.8 pour effectuer une disjonction de cas, et d'exploiter le fait que si π n'est pas naturelle, alors $\dim(G) \leq 3d_\pi$.

Proposition 2.10. *Soit G un groupe de Lie compact connexe presque simple, et π une représentation non naturelle de G . Alors pour tout $p \in [1, +\infty]$, tout $\delta \in]0, \frac{1}{3}[$:*

$$\frac{\log(N_{\pi,p}(G, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} < 80d_\pi$$

Nous pouvons maintenant énoncer un de nos résultats principaux, et donner les grandes lignes de sa démonstration. Moralement, ce résultat affirme que si un groupe de Lie compact a une grosse entropie, alors il contient un groupe simple de grande dimension, qui agit de manière naturelle.

Théorème 2.11. *Soit G un groupe de Lie compact connexe, et π une représentation unitaire fidèle irréductible de G , $\delta \in]0, \frac{1}{3}[$ et $p \in [1, +\infty]$. On écrit $G = G_1 \cdots G_k$ la décomposition de G en composantes presque simples, et $\pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_k$, où les représentations π_i ont pour dimensions respectives $d_1 \geq \cdots \geq d_k$, et $d_\pi = d_1 \cdots d_k$. On écrit :*

$$\frac{\log(N_{\pi,p}(G, \delta))}{\log(\delta^{-1})} = 20A \cdot d_\pi$$

où $A \geq 8$. Alors, π_1 est une représentation naturelle de G_1 , G_1 est un sous-groupe caractéristique de G , et on a les inégalités suivantes :

$$d_1 \geq \sqrt{Ad_\pi} \quad \dim(G_1) \geq \frac{1}{3}Ad_\pi \quad \dim(G_1) \geq \left(1 - \frac{3}{A^2}\right) \dim(G)$$

Remarque 2.12. Le fait que $\dim(G_1) \geq \frac{1}{3}Ad_\pi$ laisse entendre qu'en quelque sorte, toute (à un facteur constant près) l'entropie de G est expliquée par ce gros sous-groupe presque simple G_1 .

Démonstration. Ce qui suit n'est **pas une preuve exhaustive**, et a pour objectif d'uniquement donner les idées nécessaires à la démonstration.

Tout d'abord, la représentation π étant irréductible, son centre est envoyé dans l'ensemble des homothéties (c'est le lemme de Schur) et comme la représentation est fidèle, le centre est de dimension 1. Il y a donc au plus un des G_i qui est le cercle $\mathbb{S}^1$, et les autres sont non abéliens et de dimension ≥ 2 . On parvient donc, quitte à perdre un peu de marge dans les résultats finaux, à se ramener au cas où les G_i sont tous non abéliens. On fait cette hypothèse dans la suite.

Puis, on démontre que $\log(N_{\pi_1 \otimes \pi_2, p}(G_1 \otimes G_2, \delta_1 + \delta_2)) \leq \log(N_{\pi_1, p}(G_1, \delta_1)) + \log(N_{\pi_2, p}(G_2, \delta_2))$ pour tous $\delta_1, \delta_2 > 0$, ce qui en itérant et en utilisant l'hypothèse fournit :

$$20Ad_\pi \leq \frac{\log(N_{\pi_1, p}(G_1, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} + \sum_{i=2}^k \frac{\log(N_{\pi_i, p}(G_i, \delta/(2k-2)))}{\log(\delta^{-1})}$$

On peut ensuite démontrer de manière élémentaire que si H est un groupe presque simple et σ une représentation de H , alors $\log(N_{\sigma, p}(H, \delta)) \leq 2d_\sigma^2 \log(1 + \frac{2}{\delta})$. Ceci n'est pas surprenant : σ identifie H à un sous-groupe de $U(d_\sigma)$ qui est donc de dimension au plus d_σ^2 , ce qui explique la borne quadratique en d_σ . En utilisant cette borne, l'inégalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} 20Ad_\pi &\leq \frac{\log(N_{\pi_1, p}(G_1, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} + \sum_{i=2}^k 2d_i^2 \frac{\log(1 + \frac{4(k-1)}{\delta})}{\log(\delta^{-1})} \leq \frac{\log(N_{\pi_1, p}(G_1, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} + \sum_{i=2}^k 20d_i^2 \log(k) \\ &\leq \frac{\log(N_{\pi_1, p}(G_1, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} + 20d_1 \log(k)(d_2 + \cdots + d_k) \end{aligned}$$

Maintenant, comme tous les d_i sont ≥ 2 , on a $(d_2 + \cdots + d_k) \log k \leq k \log(k) d_2 \leq 4 \cdot 2^{k-3} d_2 \leq 4d_2 \cdots d_k$, so $20d_1 \log(k)(d_2 + \cdots + d_k) \leq 80d_\pi \leq 10Ad_\pi$ si bien que :

$$10Ad_\pi \leq \frac{\log(N_{\pi_1, p}(G_1, \delta/2))}{\log(\delta^{-1})} \quad (*)$$

On déduit alors de la Proposition 2.10 que π_1 est naturelle, car sinon on obtiendrait $10Ad_\pi < 80d_1 \leq 80d_\pi$ ce qui est exclu.

Montrons maintenant les inégalités de l'énoncé. Comme précédemment, on a la borne quadratique $\log(N_{\pi_1,p}(G, \delta/2)) \leq 10d_1^2 \log(\delta^{-1})$ d'où avec (*) : $d_1 \geq \sqrt{Ad_\pi}$. Par ailleurs, comme la représentation π_1 est naturelle, on a $\dim(G_1) \geq \frac{1}{3}d_1^2 \geq \frac{1}{3}Ad_\pi$. Enfin, pour obtenir la dernière inégalité, on observe que $\dim(G) - \dim(G_1) = \dim(G_2 \cdots G_k) \leq (d_2 \cdots d_k)^2$ puisque $\pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k$ est fidèle. De plus, cette dernière borne supérieure est $\leq \frac{d_1^2}{A^2} \leq \frac{3}{A^2} \dim(G_1)$ puisque π_1 est naturelle et $d_1^2 \geq Ad$. Dès lors, on a, comme attendu :

$$\dim(G) \leq \left(1 + \frac{3}{A^2}\right) \dim(G_1)$$

Enfin, montrons que G_1 est caractéristique dans G . On a $\dim(G_1) > \frac{1}{2} \dim(G)$, donc G_1 est de dimension strictement maximale parmi les composantes presque simples de G , donc caractéristique dans G . Ceci termine l'ébauche de preuve. $\square$

Nous nous sommes ensuite attachés à nous débarrasser des deux hypothèses parasites de ce résultat : l'irréductibilité de π et la connexité de G . Pour la connexité de G , nous avons naturellement décomposé G sous la forme $G = G^0 F$ où G^0 est la composante connexe du neutre de G , et F est un sous-groupe fini de G . Il a alors été nécessaire de borner le cardinal de F , ce qui nous a donné l'occasion d'utiliser des versions explicites du théorème de Jordan. Voir en particulier [2], article dans lequel il est démontré que pour n assez grand, tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est de cardinal au plus $(n+1)!$, borne atteinte par la représentation standard de $\mathcal{S}_{n+1}$.

Une fois ce travail effectué, nous sommes parvenus au résultat suivant.

Théorème 2.13. *Soit G un groupe de Lie compact, et $\pi : G \rightarrow U(V)$ une représentation unitaire fidèle de G . Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\delta \in]0, \frac{1}{5}[$. On écrit :*

$$\frac{\log(N_{\pi,p}(G, \delta))}{\log(\delta^{-1})} = 100A \cdot d_\pi \log(d_\pi)$$

où on suppose $A \geq 12$. Alors, il existe un sous-espace W de V de dimension $\geq A \log(d_\pi)$ sur lequel un sous-groupe normal N de G^0 (la composante connexe de l'identité dans G) agit par une représentation naturelle, et on a :

$$\dim(N) \geq (A \log(d_\pi))^2$$

Ce résultat est optimal en ceci qu'il existe des groupes ayant une représentation fidèle dans $U(d)$ et d'entropie $\simeq d \log(d)$, qui ne sont pour autant finis et n'ont donc aucun sous-groupe de dimension positive.

Un corollaire de ce résultat sans doute plus parlant et plus facile à énoncer est le suivant.

Corollaire 2.14. *Soit $d \geq 1$, et G un sous-groupe fermé de $U(V)$ où V est un espace hermitien de dimension $d \geq 1$, et soient $p \in [0, 1]$ et $\delta \in]0, \frac{1}{5}[$. On écrit :*

$$\frac{\log(N_p(G, \delta))}{\log(\delta^{-1})} = 200A \cdot d \log(d)$$

où $A \geq 12$. Alors, il existe un sous-espace $W \subseteq V$ de dimension $\geq A \log(d)$ tel que G contienne le groupe unitaire $U(W)$.

L'ensemble de ces résultats est encore en cours de ré-écriture et de vérification par Monsieur Breuillard et moi-même. Nous espérons à terme en faire un article publiable.

3 Compléments

Tout au long de ce stage, Monsieur Breuillard m'a posé ponctuellement des questions sans rapport direct avec les projets principaux sur lesquels nous travaillions. Dans cette dernière section plus courte, j'évoquerai un exemple de tel problème. Enfin, je conclurai ce rapport par plus de détails au sujet de l'école d'été à laquelle Monsieur Breuillard m'a convié au mois de juillet.

3.1 Limites de fonctions harmoniques

Cette section concerne un problème annexe que Monsieur Breuillard m'a posé quelques jours après mon arrivée à Oxford. La mathématicienne Anna Erschler l'avait en effet contacté à propos d'un présumé "bug" dans un papier de François Ledrappier, qui utilisait implicitement qu'une limite de fonctions harmoniques sur un groupe localement compact est toujours harmonique.

Or, Madame Erschler avait constaté qu'à la fin de l'article [3] de Jacques Deny, l'auteur fait mention de l'existence de suites de fonctions harmoniques sur des groupes localement compacts qui convergent vers des fonctions qui ne sont pas harmoniques. L'auteur ne fournit cependant pas d'exemple explicite, ce qui a mené Madame Erschler à poser la question à Monsieur Breuillard, qui m'a confié la recherche de tels exemples. Ce travail a été suffisamment concluant pour me donner l'occasion d'écrire une petite note sur la question, actuellement en cours de relecture par Anna Erschler et que nous espérons publier dans une revue adaptée.

Précisons maintenant de manière un peu plus détaillée le cadre de cette question. Soit G un groupe localement compact, μ une mesure de probabilité sur G . On dit qu'une fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique relativement à la mesure μ si et seulement si :

$$\forall x \in G, f(x) = \int_G f(x+y)\mu(dy)$$

La question est la suivante : existe-t-il un groupe localement compact G et une mesure de probabilité μ sur G tels qu'il existe une suite de fonctions harmoniques sur G qui converge ponctuellement vers une fonction qui n'est pas harmonique ? La réponse est positive, et nous construirons dans la suite des exemples de telles mesures dans le cas de $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 2$.

Pour cela, constatons que pour une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{Z}^d$, et $s \in \mathbb{R}^d$, la fonction $x \mapsto e^{s \cdot x}$ ($\cdot$ désigne le produit scalaire canonique) est harmonique relativement à μ si et seulement si s appartient à l'ensemble :

$$E_\mu^1 = \left\{ t \in \mathbb{R}^d \mid \int_G e^{t \cdot y} \mu(dy) = 1 \right\}$$

En particulier, si on parvient à construire μ telle que E_μ^1 n'est pas fermé, on tient un contre-exemple. Un résultat démontré dans la petite note en question est une réciproque à ce fait, que nous énonçons ci-après.

Proposition 3.1. *Soit $d \geq 1$ et μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}^d$. Alors, E_μ^1 est fermé si et seulement si toute limite simple d'une suite de fonctions harmoniques positives est harmonique.*

Nous donnons ensuite un exemple de mesure μ sur $\mathbb{Z}^2$ pour laquelle E_μ^1 n'est pas fermé, ce qui montre donc qu'une limite simple de fonctions harmoniques positives peut ne pas être harmonique. Ce contre-exemple se généralise à $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Nous explicitons dans la suite les grandes lignes de cette construction.

Théorème 3.2. *Pour tout $d \geq 2$, il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{Z}^d$ tel que E_μ^1 n'est pas fermé. En particulier, pour une telle mesure μ , il existe une limite ponctuelle de fonctions harmoniques positives qui n'est pas harmonique.*

Démonstration. Nous fournissons un contre-exemple pour le cas $d = 2$, qui se généralise à $d \geq 3$ en complétant par exemple la mesure μ par des zéros. On définit $\mu_{n,m} \geq 0$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_{n,m} &= \frac{1}{M} \frac{e^{100 \cdot n - n^2}}{n^2} && \text{si } n > 0 \text{ et } m = -n^2 \\ \mu_{n,m} &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

où M est tel que les $\mu_{n,m}$ ont pour somme 1 :

$$M = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{100 \cdot n - n^2}}{n^2}.$$

Notons dès maintenant que $M \geq e^{99}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ la fonction définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x, y) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \mu_{n,m} e^{nx} e^{my} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{100 \cdot n(x+1) - n^2(y+1)}}{n^2}.$$

Considérons le point $A = (-1, -1)$. On a $f(A) = \frac{\zeta(2)}{M} < 1$ donc $A \notin E_\mu^1$, mais nous allons prouver que A est dans l'adhérence de E_μ^1 . Pour tout $x > 0$, soit :

$$\begin{aligned} g_x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ y &\mapsto f(x-1, y-1). \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$g_x(y) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{100 \cdot nx - n^2 y}}{n^2}.$$

Fixons maintenant un $x > 0$

On a $g_x(y) = +\infty$ dès lors que $y \leq 0$, et g_x est continue décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus, par convergence monotone ou par le lemme de Fatou, on a $g_x(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} +\infty$, et clairement $g_x(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ (par convergence dominée). Dès lors, par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient un unique $y_x > 0$ tel que $g_x(y_x) = 1$, soit $f(x-1, y_x-1) = 1$.

Il suffit maintenant de prouver que $y_x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$: si c'est vrai, alors $(x-1, y_x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} A$ avec $(x-1, y_x-1) \in E$ pour tout $x > 0$, donc A est dans l'adhérence de E_μ^1 mais pas dans E_μ^1 . Prouvons maintenant que $y_x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Si ça n'est pas le cas, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_k)_{k \geq 0}$ de réels postifs de limite nulle telle que $y_{x_k} \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. on obtient alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$1 = g_{x_k}(y_{x_k}) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{100 \cdot nx_k - n^2 y_{x_k}}}{n^2} \leq \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{100 \cdot nx_k - n^2 \varepsilon}}{n^2}.$$

Pour k assez grand, on a $x_k \leq 1$, donc le n -ième terme de la somme est borné par $e^{100 \cdot n - \varepsilon n^2} / n^2$ qui est le terme général d'une série convergente. Par convergence dominée, on peut alors faire tendre k vers l'infini pour obtenir :

$$1 \leq \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2 \varepsilon}}{n^2} \leq \frac{\zeta(2)}{M}$$

ce qui contredit le fait que $M \geq e^{99}$. Ceci conclut la preuve. $\square$

L'article écrit à cette occasion contient également quelques résultats positifs sur le sujet. Par exemple, si la mesure μ décroît assez vite (en un sens à préciser) alors toute limite simple de fonctions harmoniques est harmonique.

3.2 École d'été sur le thème "Symmetry and Randomness"

Au cours du stage effectué avec Monsieur Breuillard, nous avons été amenés à utiliser beaucoup de théorie des représentations des groupes finis, ce qui nous a naturellement permis de discuter de ses applications notamment à la théorie des probabilités sur les groupes. Entre autres, les phénomènes de cutoff lors du mélange d'une chaîne de Markov sur un groupe ont fait l'objet de quelques discussions. Sur la base de mon intérêt pour le sujet, Monsieur Breuillard m'a proposé d'assister à une école d'été sur le thème "Symmetry and Randomness" qu'il organisait conjointement avec Matthew Tointon en juillet 2024 à Bristol.

Je suis donc retourné au Royaume-Uni aux alentours de mi-juillet pour assister à cette école d'été, qui avait lieu dans la School of Mathematics de l'Université de Bristol. Cela a été pour moi une expérience infiniment plus enrichissante que ce que j'aurais osé espérer. Le contenu des exposés a été très éclairant non seulement du point de vue purement mathématique, mais aussi sur l'état de l'art dans les domaines représentés. Cela a également été l'occasion rêvée pour moi de rencontrer des mathématiciens et mathématiciennes plus expérimentés, doctorants comme chercheurs établis, et d'avoir un aperçu de la vie du mathématicien en déplacement pour une conférence.

Conclusion

Dans ces derniers paragraphes, je vais maintenant tâcher de donner quelques impressions générales sur mon état d'esprit durant et après le stage. J'espère que cette conclusion pourra être utile aux générations suivantes, et rendre un peu moins intimidante a priori l'expérience du stage de recherche à l'étranger.

Le tout début de mon stage a été assez déroutant. Je suis arrivé en plein hiver dans une ville complètement inconnue, ne connaissant personne, et passée l'euphorie et l'excitation causées par la nouveauté et la découverte du lieu, j'ai assez vite commencé à trouver mes journées un peu longues, d'autant plus que je n'avais ni équipe de recherche, ni bureau attitré qui aurait pu abriter d'autres stagiaires. Bien entendu, cette phase un peu intimidante n'a duré qu'un temps, et après quelques semaines passées à Oxford, j'ai commencé à me sentir chez moi. Un point très positif de la ville d'Oxford est le fait que les gens parlent anglais : le contact a donc été nettement plus facile qu'il n'aurait été dans un pays dont je ne parle pas la langue.

L'expérience de recherche également a commencé par me surprendre : ma première mission consistait en la lecture somme toute assez solitaire d'un article. L'absence totale de manipulations expérimentales ou d'horaires de travail imposés m'offrait une liberté totale, qui s'est révélée être à double tranchant. D'une part, j'avais la liberté d'en profiter pour voyager autant que je le souhaitais, mais d'un autre côté, j'ai eu le sentiment confus de manquer de but clair, à court comme à long terme.

Après en avoir discuté avec d'autres stagiaires de Master dans mon cas, il m'est apparu que cette situation est en fait assez commune, surtout en mathématiques où la présence quotidienne au laboratoire n'est que très peu nécessaire. Il m'a donc fallu quelques semaines d'adaptation pour trouver un rythme qui me convienne vraiment.

Une fois cette période de confusion passée, j'ai commencé à apprécier de plus en plus l'expérience du stage de recherche. En particulier, c'est à peu près à ce moment là que la période de lecture d'articles s'est arrêtée au profit d'une activité de réflexion nettement plus proche de ce que j'imaginais de la recherche. J'ai également commencé à cette période à assister à de plus en plus de cours et séminaires, qui ont apporté à mon quotidien au laboratoire une variété plus que souhaitable.

C'est également à ce moment là que j'ai eu la chance d'accéder au Worcester College, à son réfectoire et à ses lieux de vie commune qui ont contribué très positivement à mon équilibre personnel en me fournissant un lieu de vie et d'étude alternatif. J'ai fait quelques rencontres mathématiques intéressantes, et en dehors du laboratoire, j'ai pris goût à l'extrême liberté imposée par mon statut professionnel : j'ai pris alors l'habitude de voyager en Angleterre ou à l'étranger presque tous les week-ends, réfléchissant aux mathématiques de mon stage dans le train ou le bus.

Cet état de choses s'est prolongé jusqu'à la fin de mon stage, et me laisse avec le recul un souvenir extrêmement positif. Par ailleurs, le dernier mois de mon stage a été marqué par un déménagement à la Maison Française d'Oxford, organisme accueillant de nombreux étudiants dans mon cas, qui a été une instance de sociabilisation auxiliaire des plus bienvenues et me laisse un souvenir nostalgique.

Avant de conclure, je souhaite insister une dernière fois sur un point déjà évoqué. La première partie de mon travail consistant en la lecture d'articles a été pour moi nettement moins excitante que la seconde, lors de laquelle j'ai eu le sentiment de trouver la satisfaction intellectuelle que j'étais venu chercher en stage de recherche.

Cette deuxième mission a également été l'occasion pour moi de ressentir pleinement deux caractéristiques que je savais être vraies de la recherche mathématique, mais que je n'avais jamais expérimentées pleinement : l'activité de recherche en mathématiques est extrêmement difficile, mais extrêmement gratifiante.

Remerciements

Les derniers mots de ce rapport seront destinés à Monsieur Emmanuel Breuillard, que je ne saurai jamais assez remercier pour son implication, sa bienveillance, son indulgence, et surtout pour les nombreuses heures qu'il m'a généreusement accordées. Sa présence rassurante tout au long de ce stage a contribué de manière capitale à rendre ma première expérience dans le monde de la recherche aussi enthousiasmante que possible.

Références

- [1] Nicolas Bourbaki. Éléments de mathématiques - groupes et algèbres de lie, Springer (1975).
- [2] Michael Collins. On Jordan's theorem for complex linear groups, J. Group Theory 10 (2007), 411–423.
- [3] Jacques Deny. Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 4 (1959-1960), exp. no 5, p. 1-11.
- [4] Sean Eberhard. Product mixing in the alternating group, Discrete Analysis, 2 :18pp, 2016.
- [5] William Fulton and Joe Harris. Representation theory, Springer Graduate Texts in Mathematics, 129.
- [6] Timothy Gowers. Quasirandom groups, Combinatorics, Probability and Computing, 17(3) :363–387, 2008.
- [7] Ben Green and Imre Z. Ruzsa. Sum-free sets in abelian groups, Isr. J. Math. 147, 157–188 (2005).
- [8] Peter Keevash ; Noam Lifschitz and Dor Minzer. On the largest product-free subsets of the alternating groups, arXiv :2205.15191, 2022.
- [9] Yuval Filmus ; Guy Kindler ; Noam Lifshitz and Dor Minzer. Hypercontractivity on the symmetric group, Forum of Mathematics, Sigma , Volume 12 , 2024 , e6.
- [10] Meinolf Geck ; Gunter Malle. The character theory of finite groupes of lie type.
- [11] Theodor Brocker ; Tammo tom Dieck. Representations of compact lie groups, Springer, Graduate texts in Mathematics, 98 (1985).