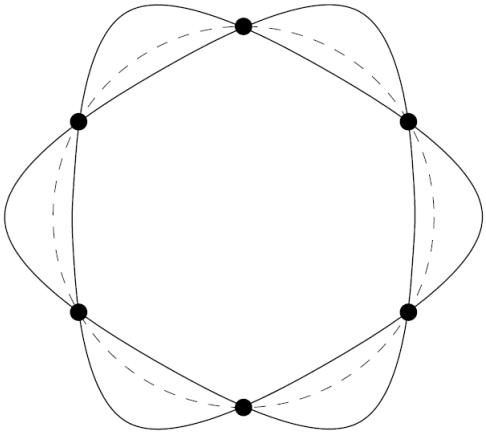
Classification des connexions méromorphes

Jean Douçot

11 juillet 2018



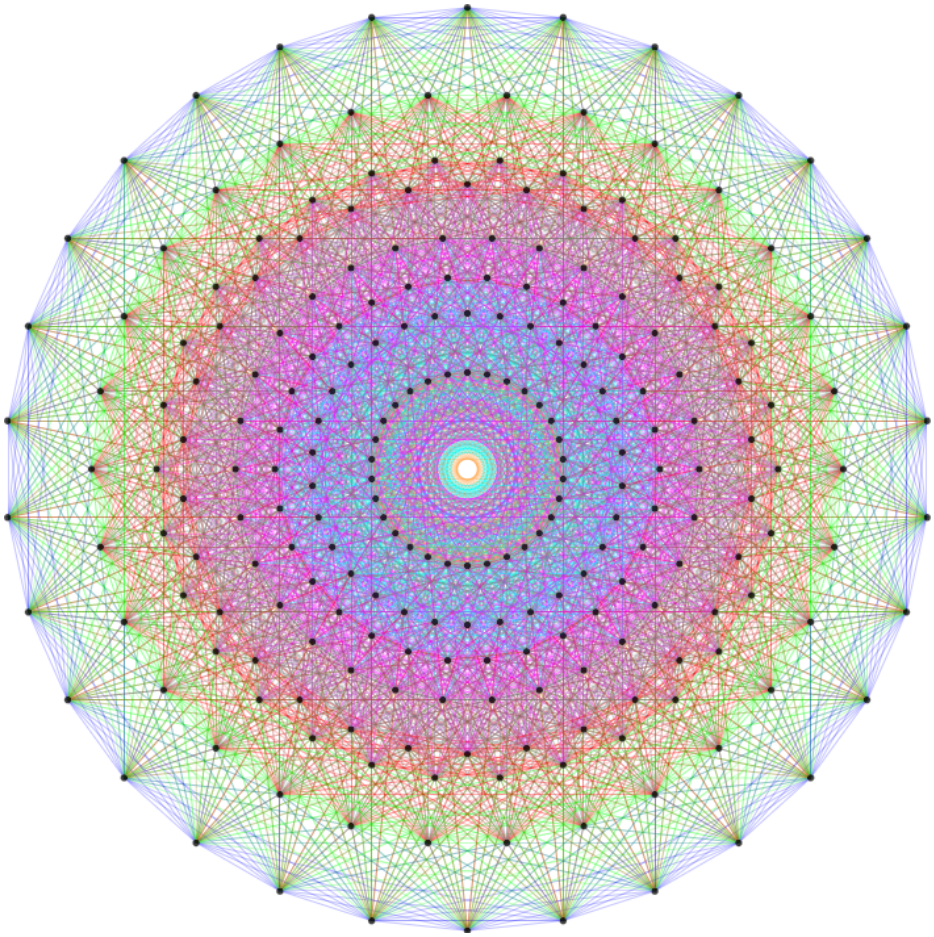


Table des matières

1 Connexions et transformations de jauge **5**
- 1.1 Rappels sur les connexions sur les fibrés vectoriels . . . 5
- 1.2 Connexions sur les fibrés principaux . . . 6
- 1.3 Transformations de jauge . . . 8
  - 1.3.1 Transformations de jauge locales . . . 8
  - 1.3.2 Transformations de jauge globales . . . 9
- 1.4 Correspondance entre connexions plates et représentations du groupe fondamental . . . 10

2 Solutions fondamentales formelles et analytiques **11**
- 2.1 Cadre général . . . 11
  - 2.1.1 Présentation du problème . . . 11
  - 2.1.2 Solutions fondamentales . . . 12
  - 2.1.3 Monodromie autour d'un point singulier . . . 12
- 2.2 Le cas des pôles d'ordre 1 . . . 12
  - 2.2.1 Introduction . . . 12
  - 2.2.2 Réduction formelle . . . 13
  - 2.2.3 Réduction analytique . . . 14
- 2.3 Séries asymptotiques . . . 15
- 2.4 Le cas des pôles d'ordre supérieur à 2 . . . 16
  - 2.4.1 Réduction formelle : cas des valeurs propres distinctes . . . 17
  - 2.4.2 Solutions dans des secteurs : le théorème principal d'existence asymptotique . . . 19
  - 2.4.3 Premier contact avec le phénomène de Stokes . . . 21
  - 2.4.4 Réduction dans le cas général . . . 21

3 Direction singulières et matrices de Stokes **26**
- 3.1 Cas des fibrés vectoriels . . . 26
  - 3.1.1 Classification formelle . . . 26
  - 3.1.2 Directions de Stokes et solutions fondamentales dans des secteurs élargis . . . 27
- 3.2 Transposition aux fibrés principaux . . . 31

4 Formulation en termes de systèmes locaux **34**
- 4.1 Systèmes locaux gradués . . . 34
  - 4.1.1 Le système local $\mathcal{I}$ . . . 34
- 4.2 Système local $\mathcal{I}$-filtré associé à une connexion méromorphe . . . 35
- 4.3 Système local de Stokes . . . 36

5 Un exemple où apparaît la projection de Coxeter **37**
- 5.1 Éléments cycliques et plan de Coxeter . . . 37
- 5.2 Une connexion particulière . . . 39
- 5.3 Une description plus fine de la projection de Coxeter . . . 39

A Preuve du théorème principal d'existence asymptotique **42**

Introduction

Ce mémoire porte sur la classification, à transformation de jauge près, des connexions méromorphes sur le plan complexe possédant des singularités. Ce problème a émergé dans le cadre de l'étude des singularités des solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients analytiques dans le plan complexe. C'est Stokes qui, en 1847, a été le premier à remarquer [19], en étudiant l'équation d'Airy qui apparaît en optique géométrique, que les solutions de l'équation possèdent des développements asymptotiques différents dans différents secteurs angulaires autour de la singularité. Ce phénomène, appelé aujourd'hui *phénomène de Stokes*, apparaît dès que l'équation différentielle possède une singularité dite irrégulière, ce qui est possible lorsqu'elle a un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2.

L'étude systématique des équations différentielles linéaires à singularités irrégulières a été initiée par Birkhoff, qui a défini [2] des quantités invariantes par changement de variable holomorphe associées à une telle équation différentielle. Cette étude a été ensuite poursuivie par de nombreux auteurs, avec des approches différentes. Balser, Jurkat et Lutz [1] ont classifié les connexions en termes de multiplicateurs de Stokes reliant les développements asymptotiques des solutions dans des secteurs angulaires différents. Malgrange et Deligne ont formulé [16] cette classification en termes de systèmes locaux, généralisant ainsi au cas irrégulier la correspondance de Riemann-Hilbert. Martinet et Ramis ont développé [17] une troisième perspective, reposant sur la théorie de la multisommabilité.

Initialement formulé en termes d'équations différentielles, le problème se traduit naturellement en termes de connexions sur des fibrés vectoriels au-dessus du plan complexe, les solutions de l'équation différentielle devenant les sections horizontales d'une connexion. Ce point de vue fournit une perspective plus géométrique, et permet de généraliser le problème au cas des fibrés principaux. Dans ce cadre, les changements de variable dans l'équation différentielle correspondent à des transformations de jauge, et le problème consiste à classifier les connexions méromorphes à transformation de jauge près. La classification des connexions méromorphes a ainsi pu être été adaptée au cas des fibrés principaux par Boalch [3]. Ceci a permis de généraliser au cas irrégulier, aussi appelé cas "sauvage", la construction des espaces de modules de connexions méromorphes.

Les grandes lignes de la théorie peuvent se résumer de la façon suivante dans le cas des fibrés vectoriels. Une connexion méromorphe possède des solutions fondamentales *formelles*, c'est-à-dire des séries formelles qui satisfont l'équation différentielle associée. Lorsque la connexion a un point singulier irrégulier, ces séries ne convergent pas en général ; néanmoins il existe de "vraies" solutions fondamentales analytiques, qui sont asymptotiques à la solution formelle sur des secteurs angulaires autour de la singularité. Dans ces solutions fondamentales figurent des facteurs exponentiels de la forme $\exp(q_i(z))$, où les q_i sont des polynômes. Selon la direction, ce ne sont pas les mêmes facteurs exponentiels qui dominent au voisinage de la singularité : il existe des directions particulières, les directions de Stokes, de part et d'autre desquelles l'ordre de dominance des facteurs exponentiels change. C'est la raison pour laquelle les développements asymptotiques des solutions analytiques ne peuvent être valables que dans certains secteurs. Il est alors nécessaire de prendre en compte la manière dont les développements asymptotiques changent d'un secteur à l'autre pour pouvoir caractériser la classe d'équivalence de la connexion.

Organisation du mémoire

Dans ce mémoire, nous présentons les principaux résultats sur la classification des connexions méromorphes et le phénomène de Stokes. Ce travail a été pour moi l'occasion de me familiariser avec les données de Stokes et les différents langages utilisés pour les décrire, et va m'être utile pour ma thèse, qui portera sur les variétés de caractères sauvages, généralisations au cas irrégulier des espaces de modules de connexions méromorphes.

Dans une première partie, nous commençons par rappeler les définitions et les principales propriétés des connexions sur les fibrés vectoriels et les fibrés principaux. Ceci

nous permet d'introduire la notion de transformation de jauge locale. En guise de premier exemple de la philosophie générale consistant à associer des objets topologiques intrinsèques à des espaces de connexions, nous présentons la correspondance entre fibrés munis d'une connexion plate, systèmes locaux et représentations du groupe fondamental dans le cadre différentiel.

Dans la section 2, nous abordons la classification des connexions de façon élémentaire, en suivant assez fidèlement le livre de Wasow [20]. L'objectif dans cette partie est d'appliquer une transformation de jauge pour mettre une connexion méromorphe sous une forme normale la plus simple possible. Cela nous permettra d'obtenir d'abord des solutions fondamentales formelles, puis de trouver des solutions analytiques asymptotiques aux solutions formelles dans des secteurs. Après une brève description du cas des pôles d'ordre 1, pour lequel les séries formelles vont converger, nous définissons les séries asymptotiques et citons leurs propriétés principales. Nous présentons ensuite un algorithme pour mettre les connexions sous forme normale, dans un premier temps dans le cas où le terme dominant a des valeurs propres distinctes, puis dans le cas général. La preuve du théorème principal d'existence asymptotique, point crucial de la théorie qui entraîne l'existence de solutions asymptotiques dans des secteurs, est donnée en annexe afin de ne pas interrompre le cours de la discussion.

Nous abordons dans la section 3 la question de la classification proprement dite. Nous présentons d'abord l'approche consistant à définir des multiplicateurs de Stokes qui relient les solutions fondamentales sur des secteurs voisins, en nous basant essentiellement sur l'article de Balser, Jurkat et Lutz [1], et en nous limitant au cas des valeurs propres distinctes. Nous décrivons ensuite, sans démonstrations, la transposition de ces résultats au cas des fibrés principaux, due à Boalch. Dans la section 4, nous présentons l'approche de Deligne et Malgrange [16], qui associe à une connexion méromorphe un système local d'espaces vectoriels, gradué par un système local $\mathcal{I}$ de facteurs exponentiels. Nous expliquons aussi comment reformuler la perspective des matrices de Stokes en termes de systèmes locaux.

Dans la section 5, nous nous intéressons à un exemple qui fait apparaître des propriétés fines de théorie de Lie. Guest et Ho ont récemment observé [11] que le diagramme des directions singulières d'une certaine connexion sur un G-fibré principal coïncident avec la projection de Coxeter de son algèbre de Lie. Nous expliquons pourquoi c'est le cas.

Remerciements

Je souhaite remercier chaleureusement mon directeur de stage Philip Boalch, qui n'a pas compté son temps pour répondre à mes questions et m'aider à m'orienter dans les subtilités des données de Stokes et des différentes approches utilisées pour en parler. Je suis heureux de pouvoir continuer en thèse avec lui.

1 Connexions et transformations de jauge

1.1 Rappels sur les connexions sur les fibrés vectoriels

Commençons par rappeler brièvement, sans démonstration, les principaux faits à propos des connexions sur les fibrés vectoriels. Pour plus de détails, voir par exemple [13]. On se place ici dans la catégorie des variétés C^∞.

Définition 1.1.1. Soit M une variété différentielle de dimension n et $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel complexe de rang r. On note $\Omega^p(E)$ l'espace vectoriel des p-formes sur M à valeurs dans E. Une connexion ∇ sur E est une application linéaire

$$\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E),$$

satisfaisant la formule de Leibniz

$$\nabla(fs) = f\nabla s + df s.$$

L'ensemble des connexions sur E est un espace affine de direction $\Omega^1(E)$. Plus précisément, dans une trivialisation locale de E au au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ donnée par une base $s = (s_1, \dots, s_r)$ de sections locales, la différentielle extérieure d agissant composante par composante est une connexion, et toute connexion est de la forme

$$\nabla = d - A,$$

où A est une 1-forme sur U à valeurs dans $M_r(\mathbb{C})$. Si $s' = (s'_1, \dots, s'_r)$ est une autre base de sections locales de E au-dessus de U, s' est reliée à s par la *transformation de jauge*

$$s'P = s, \tag{1.1}$$

où $P : U \to GL_r(\mathbb{C})$. Dans la trivialisation associée à s', la connexion s'écrit alors $d - A'$, où la nouvelle 1-forme A' est donnée par

$$A' = PAP^{-1} + dPP^{-1}.$$

La donnée d'une connexion sur E permet d'identifier les fibres au-dessus de points distincts. Une section $s \in \Omega^0(E)$ est dite *horizontale* si $\nabla s = 0$. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin dans M, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$, et soit $v \in E_a$. Alors il existe une unique section $s : [0,1] \to E$ au-dessus de γ, i.e. telle que $\pi(s(t)) = \gamma(t)$ pout tout $t \in [0,1]$, avec $s(0) = v$, qui soit horizontale le long de γ, c'est-à-dire

$$\nabla_{\dot\gamma} s = 0.$$

En effet, comme localement $\nabla = d - A$, l'équation $\nabla_{\dot\gamma} s = 0$ est une équation différentielle linéaire. L'existence et l'unicité de $s(t)$ découlent ainsi du théorème de Cauchy-Lipschitz. Notons $\tau_\gamma(v) := s(1)$. L'application $\tau_\gamma : E_a \to E_b$ est un isomorphisme linéaire, appelé *transport parallèle* le long de γ.

Le cas qui va nous occuper dans la suite est celui où E est un fibré vectoriel trivial sur le disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$, muni d'une connexion $\nabla = d - A(z)dz$, avec $A : \mathbb{C} \to M_r(\mathbb{C})$ méromorphe. Les sections holomorphes horizontales de E correspondent alors exactement aux solutions de l'équation différentielle

$$Y' = A(z)Y$$

d'inconnue $Y : \Delta \to \mathbb{C}^r$. Cette correspondance permet de considérer les équations différentielles ordinaires sur $\mathbb{C}$ comme des connexions, et nous allons dans la suite passer régulièrement d'un point de vue à l'autre.

On peut étendre une connexion ∇ sur E en une famille d'applications

$$\nabla : \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E),\ p \geq 0,$$

en posant

$$\nabla(s\,\alpha) = ds \wedge \alpha + s\,\nabla\alpha,$$

pour $s \in \Omega^0(E)$, $\alpha \in \Omega^1(M)$.

Ceci permet de définir la *courbure* de ∇

$$R = \nabla \circ \nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E).$$

Il s'avère que R est $C^\infty(M)$-linéaire, ce qui entraîne que R est une 2-forme à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$. Dans une trivialisation locale où $\nabla = d - A$, on a

$$R = -dA + A \wedge A.$$

La connexion ∇ est dite *plate* si $R = 0$. On a la caractérisation suivante des connexions plates :

Proposition 1.1.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) ∇ *est plate,*

(ii) Le transport parallèle est invariant par homotopie.

Dans le cas qui va nous intéresser, la connexion $d - A$ sur $\Delta^* \subset \mathbb{C}$ avec $A = A(z)dz$ et $A(z)$ holomorphe est plate.

1.2 Connexions sur les fibrés principaux

Définition 1.2.1. Soit G un groupe de Lie connexe. Un G-fibré principal est la donnée d'une fibration localement triviale $\pi : P \to M$ et d'une action à droite de G sur P, telle que G préserve les fibres de π, et agit librement et transitivement sur celles-ci.

Plus concrètement, un G-fibré principal $P \to M$ admet des trivialisations locales compatibles avec l'action de G : pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et une trivialisation locale $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, telle que $\phi(u.g) = \phi(u).g$ pour tous $u \in \pi^{-1}(U)$ et $g \in G$, où G agit sur $U \times G$ par $(x, h).g = (x, hg)$. Si $\phi_U : U \to U \times G$ et $\phi_V : V \to V \times G$ sont deux trivialisations, la fonction de transition $\phi_U \circ \phi_V^{-1}$ est de la forme

$$(x, h) \mapsto (x, \phi_{UV}(x).h)$$

avec $\phi_{UV} : U \cap V \to G$. De façon similaire au cas des fibrés vectoriels, un G-fibré principal $P \to M$ peut être défini par la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i) de M et de fonctions de transitions $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ vérifiant la condition de cocycle $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$. Le fibré $M \times G \to M$ avec l'action de G donnée par $(x, h).g = (x, hg)$ est appelé le G-fibré principal trivial au-dessus de M.

Si $s : U \to P$ est une section locale au-dessus d'un ouvert $U \subset M$, alors s définit une trivialisation locale de P par

$$\begin{aligned} U \times G &\to P_{|U} \\ (x, g) &\mapsto s(x).g. \end{aligned}$$

En particulier, un fibré principal est trivial si et seulement si il admet une section globale. Dans une terminologie plus proche du langage des physiciens, on peut dire aussi qu'une section $s : U \to P$ définit un choix de *jauge locale*.

Venons-en maintenant à la notion de connexion sur un fibré principal.

Définition 1.2.2. Soit G un groupe de Lie agissant (à droite) sur une variété M, soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Le champ de vecteurs fondamental associé à X est le champ de vecteurs sur M défini par

$$\tilde{X}_x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x.\exp(tX))$$

Le petit lemme suivant va nous être utile.

Lemme 1.2.3. *Sous les hypothèses de la définition précédente, notons pour tout $g \in G$ R_g l'application $x \mapsto x.g$. Soit $X \in \mathfrak{g}$, alors $(R_g)_*\tilde{X}$ est le champ de vecteurs fondamental associé à $\mathrm{ad}(g^{-1})X$, où* ad *désigne la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$.*

Définition 1.2.4. Soit $P \to M$ un G-fibré principal. Soit $p \in P$. *L'espace tangent vertical* de P en p est

$$V_p = \ker d_p\pi \subset T_pP.$$

L'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\to V_p \\ X &\mapsto \tilde{X}_p \end{aligned}$$

est un isomorphisme, ainsi la dimension de V_p est égale à celle de G. La famille des V_p, $p \in P$, forme une distribution de sous-espaces du fibré tangent TP, appelée le *fibré tangent vertical*. Il est invariant sous l'action de G : on a

$$V_p.g = V_{p.g}.$$

Définition 1.2.5. Soit $P \to M$ un G-fibré principal. Une connexion Γ sur P est la donnée d'une distribution de sous-espaces $H_p \subset T_pP$ pour tout $p \in P$, telle que

(i) $T_pP = V_p \oplus H_p$ pour tout $p \in P$. On dit que H_p est une distribution horizontale.

(ii) $H_{p.g} = H_p.g$ pour tous $p \in P$ et $g \in G$, i.e. la distribution est invariante sous l'action de G.

H_p est alors appelé le *sous-espace horizontal* de T_pP en p.

De manière similaire au cas des fibrés vectoriels, une connexion Γ va être équivalente à la donnée d'une certaine 1-forme A sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Étant donnée Γ, cette 1-forme est définie de la façon suivante.

Définition 1.2.6. Soit $p \in P$ et $X \in T_pP$, $A(X) \in \mathfrak{g}$ est l'unique élément $\xi \in \mathfrak{g}$ tel que $\tilde{\xi}_p$ soit égal à la composante verticale de X dans la décomposition $T_pP = V_p \oplus H_p$.

Proposition 1.2.7. *la 1-forme A satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $A(\tilde{X}) = X$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$.

(ii) $R_g^*A = \mathrm{ad}(g^{-1})A$, *c'est-à-dire* $A(dR_g.Y_p) = \mathrm{ad}(g^{-1})A(Y_p)$ *pour tout vecteur* $Y_p \in T_pP$.

Preuve. Le point *(i)* provient directement de la définition de A. Pour le point *(ii)*, il suffit de le vérifier dans le cas où Y_p est horizontal et dans celui où Y_p est vertical. Si v est horizontal, alors $dR_g.v$ l'est aussi pour tout $g \in G$ d'après le point *(ii)* de la définition d'une connexion. On a donc $A(dR_g.Y) = 0 = \mathrm{ad}(g^{-1})A(Y)$. Si Y est vertical, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $Y_p = \tilde{X}_p$. Or, d'après le lemme 1.2.3, $(R_g)_*\tilde{X}$ est le champ de vecteurs fondamental associé à $\mathrm{ad}(g^{-1})X$, et on a

$$(R_g^*A)_p(Y_p) = A_{p.g}((R_g)_*\tilde{X}_p) = \mathrm{ad}(g^{-1})X_p = \mathrm{ad}(g^{-1})A_p(Y_p).$$

□

Inversement, étant donnée une 1-forme A à valeurs dans $\mathfrak{g}$ satisfaisant ces propriétés, il existe une unique connexion Γ sur P telle que A soit la 1-forme associée. Cette connexion est donnée par

$$V_p = \{X \in T_pP, A(X) = 0\}.$$

1.3 Transformations de jauge

1.3.1 Transformations de jauge locales

Voyons comment s'exprime une connexion dans une trivialisation locale. Soit U un ouvert de M et $s : U \to P$ une section locale. On définit la *1-forme locale* associée à G par

$$A_s = -A \circ ds = -s^* A.$$

Remarque. Le choix du signe dans la définitions de A_s n'est pas le choix le plus habituel. Il est fait de manière à être compatible avec les notations de la littérature sur les équations différentielles.

A_s est une 1-forme sur U à valeurs dans $\mathfrak{g}$. C'est cet objet que les physiciens appellent un champ de jauge. Regardons comment se transforme A_s sous un changement de trivialisation locale. Soient $s_i : U_i \to P$ et $s_j : U_j \to P$ deux sections locales, avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, et notons $A_i := A_{s_i}$, $A_j := A_{s_j}$. Soit $g_{ji} : U_i \cap U_j \to G$ la fonction de transition entre les trivialisations locales correspondantes, de telle sorte que pour tout $x \in U_i \cap U_j$

$$s_i(x) = s_j(x).g_{ji}^{-1}(x).$$

On voudrait déterminer la *transformation de jauge locale* reliant A_i et A_j. Nous aurons besoin pour cela de quelques résultats préliminaires.

Définition 1.3.1. Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et notons L_g la multiplication à gauche par $g \in G$. La forme de Maurer-Cartan de G est la 1-forme $\mu_G \in \Omega^1(G, g)$ sur G à valeurs dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$\mu_G(Y) = d_g L_{g^{-1}}(Y),$$

pour $Y \in T_g G$.

Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. L'élément $\mu_G(v) \in \mathfrak{g}$ est le champ de vecteurs invariant à gauche sur G qui prend la valeur Y en g. Dans le cas particulier où G est un groupe de Lie matriciel, la forme de Maurer-Cartan s'écrit plus explicitement

$$(\mu_G)_g = g^{-1} dg.$$

Lemme 1.3.2. *Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété M. Pour tout $x \in M$, notons*

$$\begin{aligned} L_x : G &\to M \\ g &\mapsto x.g. \end{aligned}$$

Soit $Y \in T_g G$, on a

$$d_g L_x(Y) = \widetilde{\mu_G(Y)}_{x.g}.$$

Preuve. Notons $y = \mu_G(Y) \in \mathfrak{g}$ et posons $g(t) = g.\exp(ty) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, de telle sorte que $\dot{g}(0) = dL_g(y) = Y$. On a

$$d_g L_x(Y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x.g(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x.g)\exp(ty) = \tilde{y}_{x.g}.$$

□

Proposition 1.3.3 (transformation de jauge locale)**.** *En gardant les notations précédentes, posons $\mu_{ji} = (g_{ji}^{-1})^* \mu_G \in \Omega^1(U_i \cap U_j, \mathfrak{g})$. On a la relation suivante entre les deux 1-formes locales A_i et A_j :*

$$A_i = \mathrm{ad}(g_{ji}) \circ A_j - \mu_{ji}.$$

Dans le cas où G est un groupe de Lie matriciel, on obtient

$$A_i = g_{ji} A_j \, g_{ji}^{-1} + dg_{ji} g_{ji}^{-1}. \tag{1.2}$$

Preuve. Prenons la différentielle de la relation $s_i(x) = s_j(x).g_{ji}^{-1}(x)$. Si $Z \in T_xM$, on a par la formule de Leibniz

$$d_x s_i(Z) = d_x(s_j.g_{ji}^{-1})(Z) = d_{s_j(x)}R_{g_{ji}^{-1}(x)}(d_x s_j(Z)) + d_{g_{ji}^{-1}(x)}L_{s_j(x)}(d_x g_{ji}^{-1}(Z)).$$

On évalue ensuite A sur cette expression. Le membre de gauche est $A(d_x s_i(Z)) = A_i(Z)$. Le premier terme du membre de droite donne

$$\begin{aligned} A\left(d_{s_j(x)}R_{g_{ji}^{-1}(x)}(d_x s_j(Z))\right) &= (R^*_{g_{ji}^{-1}(x)}A)(d_x s_j(Z)) \\ &= (\mathrm{ad}(g_{ji}(x))A)\,(d_x s_j(Z)) \\ &= \mathrm{ad}(g_{ji}(x)) \circ A_j(Z), \end{aligned}$$

où l'on se sert de la propriété *(ii)* de A pour passer de la première à la deuxième ligne.

Il reste à calculer le deuxième terme du membre de droite. Notons $Y = d_x g_{ji}^{-1}(Z)$. Le lemme précédent entraîne que

$$d_{g_{ji}^{-1}(x)}L_{s_j(x)}(Y) = \widetilde{\mu_G(Y)}_{s_i(x)}.$$

Par la propriété *(i)* de A, il vient

$$\begin{aligned} A\left(d_{g_{ji}^{-1}(x)}L_{s_j(x)}(d_x g_{ji}^{-1}(Z))\right) &= \mu_G(Y)_{s_i(x)} \\ &= \mu_G(d_x g_{ji}^{-1}(Z)) \\ &= \left((g_{ji}^{-1})^*\mu_G\right)(Z) \\ &= \mu_{ji}(Z). \end{aligned}$$

En mettant ceci bout à bout, on obtient $-A_i(Z) = -A_j(Z) + \mu_{ji}(Z)$, d'où la conclusion. □

1.3.2 Transformations de jauge globales

Comme souvent, le terme de transformation de jauge est ambigu, et est utilisé pour désigner des choses différentes. La *transformation de jauge locale* que l'on vient de considérer correspond au passage d'un choix de trivialisation à un autre au-dessus d'un ouvert $U \subset M$. Il y a également une notion de *transformation de jauge globale*. Si $P \to M$ et $Q \to M$, un morphisme de G-fibrés principaux entre P et Q est une application $f : P \to Q$ qui commute aux projections, et qui est G-équivariante, c'est-à-dire

$$f(p.g) = f(p).g,$$

pour tous $p \in P$ et $g \in G$.

Le groupe des automorphismes d'un G-fibré principal $P \to M$ est aussi appelé le *groupe de jauge* de P et est noté $\mathcal{G}(P)$, et ses éléments sont des *transformations de jauge globales*. Dans le cas où le fibré P est trivial, qui est celui qui va nous intéresser par la suite, les deux notions coïncident, et le groupe de jauge s'identifie naturellement à l'ensemble des applications de M dans G : l'application $f : M \to G$ correspond à la transformation de jauge globale

$$\begin{aligned} P = M \times G &\to P \\ (x, g) &\mapsto (x, f(x).g). \end{aligned}$$

1.4 Correspondance entre connexions plates et représentations du groupe fondamental

Il va s'avérer très utile pour la classification des connexions d'adopter différents points de vue sur celles-ci. Nous avons déjà mentionné les liens entre connexions et équations différentielles ; nous allons maintenant présenter deux autres manières équivalentes de considérer les connexions plates sur un fibré vectoriel $E \to M$, la première en termes de systèmes locaux sur E, la deuxième en termes de représentations du groupe fondamental de M.

Soit $E \to M$ un fibré vectoriel de rang r muni d'une connexion plate ∇, avec M connexe. Soit $x_0 \in M$. On peut construire une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M, x_0)$ de la manière suivante. Comme la connexion ∇ est plate, le transport parallèle τ_γ le long de tout lacet γ basé en x_0 ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, et définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(M, x_0) &\to \mathrm{Aut}(E_{x_0}) \simeq GL_r(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto \tau_\gamma. \end{aligned}$$

Inversement, étant donnée une représentation $\rho : \pi_1(M, x_0) \to GL_r(\mathbb{C})$, on construit un fibré vectoriel en posant

$$E = \tilde{M} \times_\rho \mathbb{C}^r,$$

où $\tilde{M}$ est le revêtement universel de M et $\tilde{M} \times_\rho \mathbb{C}^r$ est le quotient de $\tilde{M} \times_\rho \mathbb{C}^r$ par la relation d'équivalence

$$(x, v) \sim (\gamma.x, \rho(\gamma)v), \quad \gamma \in \pi_1(M, x_0)$$

(en identifiant ici $\pi_1(M, x_0)$ au groupe d'automorphismes du revêtement $\tilde{M} \to M$). Le fibré E possède une connexion plate naturelle induite par la structure de produit de $\tilde{M} \times \mathbb{C}^r$.

Définition 1.4.1 (système local)**.** Soit X un espace topologique. Un système local $\mathbb{L}$ sur X est un faisceau localement constant, i.e. tel que pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U de X contenant x, tel que le faisceau $\mathbb{L}_{|U}$ soit constant.

Soit à nouveau $E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion plate ∇, et considérons le faisceau $\mathbb{L}$ des sections de E horizontales pour ∇. Alors $\mathbb{L}$ est un système local, de fibre $\mathbb{L}_x \simeq \mathbb{C}^r$. En effet, si $x \in M$, soit U un voisinage ouvert simplement connexe de x. Si $y \in U$, le transport parallèle le long d'un chemin γ de x à y ne dépend pas de γ, et définit un isomorphisme $\mathbb{L}_x \simeq \mathbb{L}_y$, ainsi le faisceau $\mathbb{L}_{|U}$ est constant.

Étant donné un système local $\mathbb{L}$ sur M de fibre isomorphe à $\mathbb{C}^r$ et $x_0 \in M$, on construit une représentation de $\pi_1(M, x_0)$ de la façon suivante. Soit $\gamma : [0, 1] \to M$ un lacet basé en x_0. Par compacité de l'intervalle $[0, 1]$, tout système local sur $[0, 1]$ est constant, en particulier c'est le cas de $\gamma^*\mathbb{L}$. On a donc des isomorphismes

$$(\gamma^*\mathbb{L})_0 \simeq \Gamma([0, 1], \gamma^*\mathbb{L}) \simeq (\gamma^*\mathbb{L})_1$$

Mais $(\gamma^*\mathbb{L})_0 = (\gamma^*\mathbb{L}) = \mathbb{L}_{x_0} \simeq \mathbb{C}^r$, donc ceci définit un automorphisme $\rho(\gamma)$ de $\mathbb{C}^r$. Cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, ainsi on obtient bien une représentation $\rho : \pi_1(M, x_0) \to GL_r(\mathbb{C})$.

Finalement nous avons montré :

Proposition 1.4.2. *Soit M une variété connexe et $x_0 \in M$. Les trois ensembles suivants sont en bijection :*

(i) l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés $E \to$ de rang r sur M munis d'une connexion plate ∇,

(ii) l'ensemble des classes d'isomorphismes de systèmes locaux $\mathbb{L}$ sur M de fibre isomorphe à $\mathbb{C}^r$,

(iii) l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations $\rho : \pi_1(M, x_0) \to GL_r(\mathbb{C})$.

Il se trouve qu'on a même mieux : ces bijections sont des équivalences de catégories. Par ailleurs cette correspondance se transpose naturellement au cas des fibrés principaux.

2 Solutions fondamentales formelles et analytiques

2.1 Cadre général

2.1.1 Présentation du problème

Nous en venons au problème principal auquel nous nous intéressons dans ce travail : la classification des connexions à transformation de jauge près. Les fibrés que nous allons considérer sont des fibrés triviaux sur le disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$ et nous considérons des connexions holomorphes sur Δ^* et avec éventuellement une singularité, i.e. un pôle, en 0.

Plus précisément, dans le cas des fibrés vectoriels, on considère un fibré trivial $E = \Delta \times \mathbb{C}^r$ (un fibré vectoriel sur Δ est toujours trivialisable, on peut le supposer trivial quitte à choisir une base de sections) et des connexions de la forme

$$\nabla = d - A(z)dz$$

où $A : \mathbb{C} \to M_r(\mathbb{C})$ est holomorphe sur Δ^* et méromorphe en 0. Les sections horizontales de ∇ correspondent aux solutions de l'équation différentielle

$$Y' = A(z)Y$$

d'inconnue $Y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^r$. Le groupe de jauge est

$$\mathcal{G} = \{F : \Delta \to M_r(\mathbb{C}),\ F \text{ holomorphe},\ \det F(0) \neq 0\}.$$

Un élément $F \in \mathcal{G}$ transforme la connexion $\nabla = d - Adz$ en $d - B(z)dz$, où

$$B = F[A] = FAF^{-1} + F'F^{-1}. \tag{2.1}$$

En termes d'équations différentielles, cela correspond à faire le changement de variable $Z = F(z)Y$ dans l'équation $Y' = A(z)Y$, qui mène à la nouvelle équation

$$Z' = B(z)Z.$$

Remarque. On peut préciser qu'on travaille avec des fibrés holomorphes en utilisant le dictionnaire entre fibrés vectoriels et faisceaux localement libres. Dans ce langage, que nous n'aurons pas véritablement besoin d'utiliser ici, notre fibré E est un faisceau de modules localement libre de type fini sur le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes sur Δ. Une connexion holomorphe est une application

$$\nabla : E \to \Omega^1(E) = \Omega^1(\Delta) \otimes_{\mathcal{O}} E$$

vérifiant la formule de Leibniz.

Dans le cas des fibrés principaux, on considère le fibré trivial $\Delta \times G$ où G est un groupe de Lie complexe, et des connexions données par une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ $A_s = A(z)dz$, où $A : \Delta^* \to \mathfrak{g}$ holomorphe sur Δ^* avec éventuellement un pôle en 0. Le groupe de jauge est

$$\mathcal{G} = \{F : \Delta \to G,\ F \text{ holomorphe}\}.$$

Il agit sur la connexion donnée par A par

$$F[A] = \mathrm{Ad}(F)A + (F^{-1})^*\mu_G.$$

Le problème que l'on se pose est décrire l'espace des connexions méromorphes sur Δ à transformation de jauge près. Dans la suite, nous allons décrire la classification des connexions dans le cas des fibrés vectoriels, qui est plus simple, et nous nous contenterons d'énoncer les résultats équivalents concernant les fibrés principaux.

2.1.2 Solutions fondamentales

Dans la suite de cette partie, nous considérons le cas des fibrés vectoriels, et nous adoptons le point de vue des équations différentielles : la connexion $d - Adz$ correspond à l'équation différentielle $Y' = AY$.

Le théorème fondamental suivant garantit que cette équation a des solutions.

Théorème 2.1.1. *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $A : U \to M_r(\mathbb{C})$ holomorphe. Pour tout $Y_0 \in \mathbb{C}^r$ il existe une unique application $Y : U \to \mathbb{C}^r$ solution de l'équation différentielle $Y' = AY$ et telle que $Y(z_0) = Y_0$. De plus Y est holomorphe sur U.*

L'espace des solutions de l'équation différentielle sur U est donc un espace vectoriel complexe de dimension r.

Définition 2.1.2. On appelle *solution fondamentale* de l'équation différentielle $Y' = AY$ sur U une matrice $\Phi : U \to M_r(\mathbb{C})$ dont les colonnes forment une base de solutions de l'équation.

Si Φ est une solution fondamentale, elle est solution de l'équation différentielle

$$Y' = A(z)Y,$$

où l'inconnue est maintenant une fonction matricielle $Y : U \to M_r(\mathbb{C})$. Si Φ et Φ' sont deux solutions fondamentales, il existe une matrice $C \in GL_r(\mathbb{C})$ constante telle que $\Phi(z) = \Phi'(z)C$ pour tout z. De plus toute solution de l'équation différentielle matricielle est de la forme $Y(z) = \Phi(z)C$ avec $C \in M_r(\mathbb{C})$ constante.

2.1.3 Monodromie autour d'un point singulier

Supposons que la fonction $A(z)$ a un pôle en $z = 0$, et soit $z_0 \neq 0$. Soit $\Phi(z)$ une solution fondamentale de l'équation $Y' = AY$ définie au voisinage de z_0. Du fait de l'existence locale de solutions, on peut prolonger analytiquement $\Phi(z)$ le long d'un lacet basé en z_0 qui fait le tour de 0 dans le sens direct. Lorsqu'on revient en z_0, on obtient une nouvelle solution fondamentale $\Phi^+(z)$ de l'équation au voisinage de z_0 qui va être en général différente de la solution de départ $\Phi(z)$. Plus précisément, il existe une matrice constante $C \in GL_r(\mathbb{C})$ telle que

$$\Phi^+(z) = \Phi(z)C.$$

La matrice C ne dépend que de l'équation différentielle et est appelée la *monodromie* en 0 de l'équation. Choisissons une matrice Λ telle que $\exp\{2i\pi\Lambda\} = C$ et posons

$$S(z) := \Phi(z)z^{-1/2i\pi \log C}.$$

L'intérêt est que la fonction $S(z)$ ne change pas lorsqu'on fait le tour autour de 0 et est donc univaluée. Ceci permet d'écrire $\Phi(z)$ sous la forme

$$\Phi(z) = S(z)z^{\Lambda},$$

où le premier facteur est univalué, et le second facteur est une fonction élémentaire multivaluée.

2.2 Le cas des pôles d'ordre 1

2.2.1 Introduction

On peut distinguer plusieurs types de points singuliers. Hélas, il existe plusieurs terminologies à propos des différents types de points singuliers, ce qui prête facilement à

confusion. Nous suivrons ici la terminologie moderne, et dirons qu'une équation différentielle matricielle (i.e. un système d'équations différentielles scalaires) $Y' = A(z)Y$, avec A méromorphe en 0, a un *point singulier régulier* en $z = 0$ lorsque ses solutions ont une croissance au plus polynomiale en z^{-1} dans n'importe quelle direction autour de 0. C'est notamment le cas lorsque $A(z)$ à au plus un pôle d'ordre 1 en 0 (on parle alors de système fuchsien). Dans le cas contraire on dira que 0 est *un point singulier irrégulier*. Il faut pour cela que $A(z)$ ait un pôle d'ordre au moins 2 en 0. Mais ce n'est pas une condition suffisante : par exemple, si A_0 est une matrice nilpotente, et $A(z) = A_0/z^2$, une solution fondamentale de l'équation est $\Phi(z) = \exp(-A_0/z)$, qui est polynomiale en $1/z$. Dans une terminologie plus ancienne, le terme "point singulier régulier" signifiait que le pôle est simple.

On étudie dans ce paragraphe le cas où $A(z)$ a un pôle d'ordre 1 en $z = 0$, en particulier 0 est un point singulier régulier. Pour des raisons de commodité d'écriture, on va changer la notation et écrire l'équation sous la forme

$$zY' = A(z)Y,$$

avec $A : U \to M_r(\mathbb{C})$ holomorphe. Pour trouver une solution fondamentale, on va chercher à appliquer une transformation de jauge correspondant au changement de variable $Y = F(z)Z$ pour se ramener à une équation différentielle

$$Z' = B(z)Z,$$

avec $A/z = F[B/z]$, c'est-à-dire

$$A = FBF^{-1} + zF'F^{-1}, \tag{2.2}$$

en choisissant F de telle sorte que la matrice $B(z)$ soit sous une forme normale la plus simple possible. Ce procédé va se généraliser au cas des pôles d'ordre supérieur, mais des complications vont apparaître.

2.2.2 Réduction formelle

L'équation (2.2) peut se réécrire

$$zF' = AF - FB. \tag{2.3}$$

On va chercher à satisfaire cette équation par une fonction F holomorphe en 0. Notons

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n,$$
$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$
$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n.$$

En reportant ces développements en série dans (2.3) et comparant terme à terme, on obtient le système d'équations suivant :

$$A_0F_0 - F_0B_0 = 0, \quad n = 0, \tag{2.4}$$
$$(A_0 - nI)F_n - F_nB_0 = -\sum_{k=0}^{n-1}(A_{n-k}F_k - F_kB_{n-k}), \quad n > 0. \tag{2.5}$$

On va résoudre par récurrence ce système d'équations pour $F_0, F_1, \ldots$, en choisissant les B_n les plus simples possibles : c'est la partie *formelle* de la réduction. Il restera ensuite à s'assurer que la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ converge bien. Le petit résultat suivant va nous être utile à de nombreuses reprises.

Lemme 2.2.1. *L'équation*

$$AX - XB = 0,$$

où $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_m(\mathbb{C})$, d'inconnue $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, a des solutions différentes de $X = 0$ si et seulement si A et B ont une valeur propre commune.

Preuve. Supposons que A et B ont en commun la valeur propre λ. Alors λ est aussi valeur propre de la transposée ${}^tB$. Soit v un vecteur propre de A et w un vecteur propre de ${}^tB$ pour λ. Alors $X = v{}^tw$ est solution de l'équation.

Supposons maintenant que A et B n'ont aucune valeur propre commune. Soit X une solution de l'équation, montrons que $X = 0$. Soit λ une valeur propre de B, et soit $\ker(B - \lambda I)^p$ le sous-espace caractéristique associé. La relation $AX - XB = 0$ entraîne $(A - \lambda I)^p X = X(B - \lambda I)^p$. Soit $w \in \ker(B - \lambda I)^p$, on a alors $(A - \lambda I)^p Xw = 0$. Comme λ n'est pas valeur propre de A cela entraîne $Xw = 0$. Comme $\mathbb{C}^m$ est somme directe des sous-espaces caractéristiques de B, on obtient que $X = 0$. □

Choisissons $B_0 = A_0$ et $F_0 = I$. Supposons que pour tout $n \neq 1$, $A_0 - nI$ et A_0 n'ont pas de valeurs propres communes, i.e. deux valeurs propres de A_0 ne diffèrent jamais d'un entier. Le lemme entraîne alors que l'équation (2.5) a une solution pour tout $n \geq 1$, et on a donc :

Proposition 2.2.2. *Supposons que deux valeurs propres de A_0 ne diffèrent jamais d'un entier. Alors il existe une série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ avec $F_0 = I$ telle que la transformation de jauge formelle $Y = (\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n)\, Z$ transforme l'équation $zY' = A(z)Y$ en $zZ' = A_0 Z$.*

On s'est donc ramené par une transformation de jauge au cas où la matrice A est constante. Insistons qu'à ce stade il ne s'agit que d'opérations *formelles* : rien ne dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ converge.

Si jamais A_0 possède deux valeurs propres qui diffèrent d'un entier (condition dite de résonance), la méthode ne s'applique pas. Nous n'allons pas étudier ce cas maintenant, il sera pris en compte par l'étude plus générale que nous ferons plus loin.

2.2.3 Réduction analytique

Nous souhaiterions maintenant montrer que la série formelle $\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ converge et définit ainsi une "vraie" transformation de jauge analytique. Dans le cas où $A(z)$ a un pôle d'ordre 1, il s'avère que c'est le cas, mais cela n'est pas vrai en général dans le cas d'un pôle d'ordre supérieur. La convergence de la série est une conséquence immédiate du résultat suivant.

Proposition 2.2.3. *Soit $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ une fonction holomorphe sur le disque $\{|z| < r_0\}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série formelle qui satisfait de façon formelle l'équation différentielle*

$$zf' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \right) f.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge sur $\{|z| < r_0\}$ vers une solution de l'équation.

La convergence de la série $\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ en découle car $\hat{F}$ est solution de l'équation différentielle (2.3).

Preuve. Dire que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une solution formelle de l'équation signifie qu'on a en identifiant terme à terme les équations

$$C_0 a_0 = 0, \tag{2.6}$$

$$(C_0 - nI)a_n = -\sum_{k=1}^{n} C_k a_{n-k}. \tag{2.7}$$

Soit n_0 tel que $C_0 - nI$ est inversible pour $n > n_0$. Il existe $c > 0$ tel que $||(C_0 - nI)^{-1}|| \leq c$ pour $n > n_0$. L'équation (2.7) entraîne que

$$||a_n|| \leq c \sum_{k=1}^{n} ||C_k||\ ||a_{n-k}||, \quad n > n_0. \tag{2.8}$$

Définissons $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} ||C_n|| z^n$. La série entière converge pour $|z| < z_0$. Introduisons la fonction

$$\hat{y}(z) = (1 - c\phi(z))^{-1} \left(||a_0|| + \sum_{k=1}^{n_0} \left(||a_k|| - c \sum_{l=1}^{k} ||C_l||\ ||a_{k-l}|| \right) z^k \right)$$

Comme $\phi(0) = 0$, la fonction $\hat{y}(z)$ est holomorphe sur $\{|z| < z_1\}$ avec $0 < z_1 \leq z_0$. Notons $\hat{y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n z^n$ pour $|z| < z_1$. En identifiant terme à terme on trouve

$$\hat{a}_n = ||a_n||, \quad n \leq n_0$$
$$\hat{a}_n = c \sum_{k=1}^{n} ||C_k|| \hat{a}_{n-k}, \quad n > n_0.$$

L'inégalité (2.8) entraîne alors

$$||a_n|| \leq \hat{a}_n \quad \text{pour tout } n.$$

Ainsi la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge sur $\{|z| < z_1\}$. On peut donc différencier terme à terme, et on en déduit que la fonction $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est solution de l'équation différentielle. □

La nouvelle équation différentielle $zZ' = A_0 Z$ se résout aisément : la matrice

$$e^{A_0 \log z} = z^{A_0}$$

est une solution fondamentale. Nous avons finalement montré

Théorème 2.2.4. *Soit $A(z)$ matrice holomorphe en $z = 0$, telle que deux valeurs propres de $A(0)$ ne diffèrent jamais d'un entier. Alors l'équation différentielle $zY' = A(z)Y$ admet une solution fondamentale de la forme*

$$\Phi(z) = F(z) z^{A(0)}, \quad F(0) = I, \tag{2.9}$$

où $F(z)$ est holomorphe en $z = 0$.

2.3 Séries asymptotiques

Nous nous intéressons maintenant au cas où $A(z)$ a un pôle d'ordre au moins 2, en 0, ce qui est le cas pour les singularités irrégulières. La réduction formelle va ressembler au cas précédent, mais il y a une différence fondamentale : contrairement au cas des pôles d'ordre 1, les séries formelles obtenues ne vont pas converger en général. Néanmoins, il va exister dans des secteurs angulaires autour de 0 des solutions de l'équation différentielle qui sont *asymptotiques* à la solution formelle. Il est donc nécessaire de dire quelques mots sur les séries asymptotiques.

Définition 2.3.1. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble $S \subset \mathbb{C}$ admettant 0 comme point d'accumulation. On dit que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est asymptotique à f quand z tend vers 0 dans S si

$$z^{-m} \left(f(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \right) \xrightarrow[z \to 0,\ z \in S]{} 0$$

pour tout $m \geq 0$. On note alors

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in S, \quad z \to 0.$$

On a les propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 2.3.2. *(i) Une fonction f admet au plus une série asymptotique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ quand $z \to 0$ dans S.*

(ii) Si $h(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, et $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ alors $h(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$.

(iii) Si $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, alors $f(z)g(z)$ est asymptotique à la série produit de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

(iv) Si $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $z \in S$ et $g(u) \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ pour $u \in T$ et si $f(z) \in T$ pour $z \in S$, alors $g \circ f(z) \sim \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^p$, où les coefficients c_p sont obtenus par composition formelle des deux séries.

(v) Si $h(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $a_0 \neq 0$ sur le domaine R, il existe $z_0 > 0$ tel que $1/h(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ sur $S := R \cap \{|z| < z_0\}$, où les coefficients c_m sont obtenus en inversant formellement la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

A partir de maintenant on va considérer seulement des fonctions analytiques. Les domaines sur lesquels les développements asymptotiques seront valides vont être principalement des secteurs angulaires avec sommet en $z = 0$ (avec les bords inclus). Le résultat suivant explique pourquoi, dans le cas où nos solutions formelles vont diverger, les "vraies" solutions analytiques ne pourront leur être asymptotiques que dans des secteurs.

Proposition 2.3.3. *Si $f(z)$ est holomorphe sur le voisinage annulaire $V = \{0 < |z| \leq z_0\}$ de 0, et si $f(z) \sim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ dans toute direction autour de 0, alors la série converge vers f sur V.*

Preuve. Par hypothèse, on a $\lim_{z \to 0} f(z) = a_0$. Ainsi si l'on prolonge f en 0 en posant $f(0) = 0$, la fonction obtenue est holomorphe en $z = 0$. Par unicité de son développement en série entière, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ au voisinage de 0. □

En revanche, si la série asymptotique pour f converge sur un secteur S, cela n'implique pas qu'elle converge vers f. Par exemple la fonction $e^{-1/z}$ est représentée asymptotiquement par la série dont tous les coefficients sont nuls lorsque $z \to 0$ dans le demi-plan supérieur. Mentionnons pour finir un résultat d'intégration et de dérivation des séries asymptotiques.

Proposition 2.3.4. *(i) Soit f holomorphe sur un secteur S. Si $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur S, alors $\int_0^z f(t)dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{r+1}$ (à condition que le chemin d'intégration, sauf le point 0, soit dans S).*

(ii) Soit f holomorphe sur un secteur $S = \{0 < |z| < z_0,\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$ avec $\theta_2 > \theta_1$. Si $f \sim_{z \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur S, alors $f' \sim_{z \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ dans tout sous-secteur strict S' défini par $\theta_1 < \theta_1' \leq \arg z \leq \theta_2' < \theta_2$.

2.4 Le cas des pôles d'ordre supérieur à 2

En pratique, beaucoup d'équations différentielles intéressantes, par exemple l'équation d'Airy ou l'équation de Bessel, présentent une singularité irrégulière en $z = \infty$. Par cela, on entend que le comportement à l'infini de l'équation est le comportement en $z = 0$ de l'équation obtenue par le changement de variable $x = 1/z$. Pour les équations à singularités irrégulières, la convention la plus fréquente est ainsi d'avoir la singularité en $z = \infty$.

Considérons une équation différentielle avec un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2 en $z = 0$, de la forme

$$z^h Y' = B(z)Y,$$

avec $B(z)$ holomorphe en 0, et $h \geq 2$. Le changement de variable $x = 1/z$ donne l'équation

$$x^{-q} \frac{dY}{dx} = A(x)Y,$$

où $A(x) = -B(1/z)$ est holomorphe en $x = \infty$ et $q = h - 2$.

Il va s'avérer commode pour la suite de relâcher les hypothèses sur A, et de supposer seulement que $A(z) \sim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$ pour $|z| > z_0$ sur un certain secteur S.

2.4.1 Réduction formelle : cas des valeurs propres distinctes

Équations scalaires Commençons par traiter le cas où Y est un scalaire. En effet, ce cas est simple, va nous servir plus tard, et fait déjà apparaître certains éléments dans la structure des solutions qu'on va retrouver dans le cas général.

Supposons donc que $A(z)$ est une fonction scalaire holomorphe sur $S \cap \{|z| > z_0\}$ et qu'on a le développement asymptotique $A(z) \sim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$. La solution générale de l'équation différentielle $z^{-q}Y' = AY$ est

$$Y = c\ \exp\left(\int_a^z t^q A(t)dt\right),$$

avec $c \in \mathbb{C}$ une constante. Écrivons

$$t^q A(t) = \sum_{n=0}^{q} A_n t^{-n+q} + A_{q+1}t^{-1} + B(t),$$

avec $B(t) \sim_{z\to\infty} \sum_{n=q+2}^{\infty} A_n t^{q-n}$ sur S. Si l'on note

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j}{q+1-j} z^{q+1-j}, \quad \Lambda = A_{q+1},$$

on a $Y = c' e^{Q(z)} z^{\Lambda} \exp\left(\int_\infty^z B(t)dt\right)$. Les propriétés des séries asymptotiques entraînent que la fonction $\exp\left(\int_\infty^z B(t)dt\right)$ possède un développement asymptotique $\exp\left(\int_\infty^z B(t)dt\right) \sim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}$ sur S donné par les opérations formelles correspondantes.

Finalement, on a une solution de l'équation différentielle de la forme

$$\Phi(z) \sim_{z\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-r}\right) z^{\Lambda} e^{Q(z)}, \quad z \in S, \tag{2.10}$$

(avec un abus de notation dans l'emploi de $\sim$: on a plus précisément $\Phi(z)e^{-Q(z)}z^{-\Lambda} \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}$).

Réduction formelle Comme dans le cas des pôles simples, on cherche à appliquer une transformation de jauge pour mettre l'équation différentielle

$$z^{-q}Y' = A(z)Y \tag{2.11}$$

sous une certaine forme normale. Comme dans le cas précédent, on cherche un changement de variable tel que dans la nouvelle équation obtenue

$$z^{-q}Z' = B(z)Z,$$

la matrice $B(z)$ soit de la forme la plus simple possible. B est reliée à A par la transformation de jauge

$$A = FBF^{-1} + z^{-q}F'F^{-1},$$

qu'on va comme précédemment réécrire sous forme d'une équation différentielle satisfaite par F :

$$z^{-q}F' = AF - FB. \tag{2.12}$$

De nouveau, on commence par chercher les solutions sous forme de séries formelles

$$\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n},$$
$$\hat{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{-n}.$$

On a aussi le développement asymptotique $A(z) \sim_{A\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$ sur S. L'équation (2.12) donne en identifiant les coefficients terme à terme les relations

$$A_0 F_0 - F_0 B_0 = 0, \tag{2.13}$$
$$A_0 F_n - F_n B_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (F_k B_{n-k} - A_{n-k} F_k) - (n-q-1) F_{n-q-1}, \quad n > 0. \tag{2.14}$$

On voit déjà apparaître une différence avec le cas précédent en comparant les membres de gauche des équations (2.5) et (2.14) : dans le cas d'un pôle d'ordre supérieur à 2 on n'a pas l'équivalent du terme $-nP_n$, et les équations homogènes sont les mêmes pour chaque P_n. En particulier, si on choisit comme précédemment $B_0 = A_0$, l'application

$$X \mapsto A_0 X - X A_0$$

n'est pas inversible d'après le lemme 2.2.1, si bien que les équations (2.14) n'auront pas de solution pour des choix arbitraires des B_n pour $n \geq 1$.

Pour s'en sortir, on va réduire l'ordre du système en diagonalisant A par blocs. On utilise pour cela le résultat d'algèbre linéaire suivant, qui est une conséquence de la décomposition de Jordan (mais est plus faible et peut aussi être démontré directement).

Lemme 2.4.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Si on peut séparer ces valeurs propres en deux groupes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ de telles sorte que $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \leq p$, $j > p$, alors A est semblable à une matrice par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} A^{11} & 0 \\ 0 & A^{22} \end{pmatrix}$$

où $A^{11} \in M_p(\mathbb{C})$ a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $A^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ a pour valeurs propres $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$.

Quitte à appliquer une transformation de jauge par une matrice constante, on va donc supposer que A_0 est déjà de cette forme. On cherche alors les coefficients B_n et F_n comme matrices par blocs, plus précisément

$$B_n = \begin{pmatrix} B_n^{11} & 0 \\ 0 & B_n^{22} \end{pmatrix},$$
$$F_n = \begin{pmatrix} 0 & F_n^{12} \\ F_n^{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci va permettre de résoudre récursivement (2.11) pour $n \geq 1$. En effet en notant le membre de droite de (2.11)

$$H_n = \begin{pmatrix} H_n^{11} & H_n^{12} \\ H_n^{21} & H_n^{22} \end{pmatrix}$$

et en identifiant chaque bloc on obtient les relations

$$0 = B_n^{11} + H_n^{11}, \qquad A_0^{11} F_n^{12} - F_n^{12} A_0^{22} = H_n^{12},$$
$$A_0^{22} F_n^{21} - F_n^{21} A_0^{11} = H_n^{21}, \qquad 0 = B_n^{22} + H_n^{22}.$$

Les deux équations pour les blocs diagonaux permettent de déterminer B_n en fonction de H_n, et les deux autres équations déterminent de manière unique F_n^{12} et F_n^{21} par le lemme 2.2.1 puisque A_0^{11} et A_0^{22} ont des valeurs propres distinctes.

On s'est donc ramené par une transformation de jauge formelle à l'équation $z^{-q}Z' = (\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n)\, Z$ où chaque B_n est une matrice par blocs de cette forme. En itérant le procédé, on se ramène au cas où les B_n sont des matrices par blocs avec une décomposition par blocs correspondant aux valeurs propres distinctes de A_0. En particulier dans le cas où A_0 a r valeurs propres distinctes, les B_n seront des matrices diagonales.

2.4.2 Solutions dans des secteurs : le théorème principal d'existence asymptotique

Jusqu'ici, comme dans le cas des pôles simples, les opérations que l'on a faites sont entièrement formelles : rien ne nous assure que nos séries formelles $\hat{B}(z)$ et $\hat{F}(z)$ convergent. C'est là qu'apparaît la différence fondamentale entre les deux cas : en général pour un pour un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2 ces séries ne vont pas converger. On aura seulement un résultat plus faible : il existe des fonctions holomorphes $F(z)$ et $B(z)$ asymptotiques aux séries $\hat{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ et $\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ dans des secteurs autour de $z = \infty$ d'angle strictement inférieur à 2π. Cela va être une conséquence du théorème fondamental suivant :

Théorème 2.4.2 (Théorème principal d'existence asymptotique)**.** *Soit S un secteur ouvert de $\mathbb{C}$ autour de l'origine, d'angle inférieur ou égal à $\pi/(q+1)$, avec q entier positif. On considère l'équation différentielle*

$$x^{-q} y' = f(x, y) \tag{2.15}$$

d'inconnue le vecteur $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$. On suppose que la fonction $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $f(x, z)$ est un polynôme en les coefficients de z, dont les coefficients sont holomorphes en x sur $S \cap \{x_0 \leq |x| < \infty\}$, où $x_0 > 0$.

(ii) Les coefficients du $f(x, z)$ admettent des séries asymptotiques en puissances de x^{-1} pour $x \to \infty$ sur S.

(iii) La matrice jacobienne

$$\left\{ \lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in S}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\Big|_{z=0} \right) \right\}$$

est inversible.

On suppose de plus que l'équation différentielle est satisfaite formellement par une série entière de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x^{-n}.$$

Alors il existe au voisinage de ∞ dans S une solution $y = \phi(x)$ de l'équation (2.15) *telle que sur dans chaque sous-secteur strict de S*

$$\phi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^{-n}, \quad x \to \infty.$$

La preuve de ce théorème est longue et nous la donnons en appendice. Voyons comment on se ramène à une équation de la forme de (2.15). On cherche des matrices holomorphes $F(z)$ et $B(z)$ de la forme suggérée par les calculs formels précédents. Plus précisément posons

$$F(z) = I + \tilde{F}(z),$$
$$B(z) = A_0 + \tilde{B}(z),$$

avec

$$\tilde{F}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{F}^{12}(z) \\ \tilde{F}^{21}(z) & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{B}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{B}^{11}(z) & 0 \\ 0 & \tilde{B}^{22}(z) \end{pmatrix}.$$

En reportant ceci et en identifiant bloc par bloc dans l'équation (2.12), puis en éliminant $\tilde{B}^{11}(z)$ et $\tilde{B}^{22}(z)$ grâce aux équations correspondant aux blocs diagonaux, on obtient l'équation suivante satisfaite par $\tilde{F}^{12}(z)$

$$z^{-q}(\tilde{F}^{21})' = A^{21}(z) + A^{22}(z)\tilde{F}^{21} - \tilde{F}^{21}A^{11}(z) - \tilde{F}^{21}A^{12}(z)\tilde{F}^{21},$$

ainsi qu'une équation similaire pour $\tilde{F}^{21}(z)$. Cette équation est bien de la forme de (2.15) : le membre de droite est quadratique en les coefficients de $\hat{F}^{21}$, à coefficients holomorphes en z, qui admettent un développement asymptotique en ∞ sur le secteur S. La condition *(iii)* du théorème est vérifiée d'après le lemme (2.2.1). Le théorème s'applique donc et entraîne

Corollaire 2.4.3. *En conservant les notations précédentes, si le secteur S est d'angle inférieur ou égal à $\pi/(q+1)$, il existe une matrice holomorphe $F(z)$ sur $S \cap \{z_1 \leq |z| < \infty\}$ admettant le développement asymptotique $F(z) \sim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}$ avec $\det F_0 \neq 0$ telle que la transformation de jauge $Y = F(z)Z$ transforme l'équation différentielle initiale $z^{-q}Y' = A(z)Y$ en $z^{-q}Z' = B(z)Z$, où*

$$B(z) = A_0 + \begin{pmatrix} \tilde{B}^{11}(z) & 0 \\ 0 & \tilde{B}^{22}(z) \end{pmatrix}$$

et les $\tilde{B}^{ii}(z)$ ont le développement asymptotique $\tilde{B}^{jj}(z) \sim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{jj} z^{-n}$.

Considérons maintenant le cas où A_0 a toutes ses valeurs propres distinctes. Alors, en itérant le procédé, on aboutit à une matrice holomorphe $B(z)$ *diagonale*. L'équation différentielle $z^{-q}Z' = B(z)$ se réduit à une famille de r équations scalaires de la forme étudiée plus haut, et ses solutions fondamentales sont les

$$\Psi(z) = \exp\left(\int_a^z t^q B(t)dt\right) C'$$

avec $C' \in M_r(\mathbb{C})$ constante. On peut écrire cette solution sous une forme similaire à (2.10) :

$$\Psi(z) = G(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}C,$$

avec

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{q} B_k \frac{z^{q-k+1}}{q-k+1}, \qquad \Lambda = B_{q+1},$$

où C est une matrice constante et $G(z)$ holomorphe possédant une série asymptotique pour $z \to \infty$ sur S.

Les solutions fondamentales de l'équation de départ s'en déduisent par multiplication par $F(z)$. En résumé, nous avons finalement montré

Théorème 2.4.4. *Soit $A(z)$ matrice holomorphe telle que $A(z) \sim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$ sur un secteur S d'angle inférieur à $\pi/(q+1)$ et telle que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ de A_0 soient deux à deux distinctes. Alors l'équation différentielle $z^{-q}Y' = A(z)Y$ possède une solution fondamentale de la forme*

$$\Phi(z) = F(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}, \tag{2.16}$$

où $Q(z)$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont des polynômes de degré $q+1$, et dont le terme dominant est

$$\frac{z^{q+1}}{q+1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix},$$

Λ est une matrice diagonale constante, et $F(z)$ est une matrice holomorphe, qui admet sur S un développement asymptotique

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}, \quad z \to \infty,$$

avec les matrices Λ et $Q(z)$ déterminées de manière unique comme ci-dessus par les calculs formels.

(Nous avons changé de notations pour énoncer le théorème : la fonction $F(z)$ dans l'énoncé du théorème est égale à $F(z)G(z)$ dans les notations précédentes.)

2.4.3 Premier contact avec le phénomène de Stokes

Nous venons de prouver dans le cas où les valeurs propres de A_0 sont distinctes l'existence d'une solution fondamentale $\Phi(z) = F(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}$ de notre équation différentielle de la forme de (2.16) *dans un secteur S* suffisamment étroit. En particulier, le théorème précédent ne garantit la validité du développement asymptotique de $F(z)$ que dans ce secteur, et il se peut tout à fait que ce développement ne soit pas valide dans toutes les directions autour de $z = \infty$, et que $F(z)$ ne puisse pas être continué analytiquement autour de $z = \infty$. Si S_1 et S_2 sont deux secteurs d'intersection non vide, on aura les deux solutions fondamentales

$$\Phi_1(z) = F_1(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}, \quad z \in S_1$$
$$\Phi_2(z) = F_2(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}, \quad z \in S_2.$$

Elles sont reliées par

$$\Phi_1(z) = \Phi_2(z)C, \quad z \in S_1 \cap S_2,$$

où C est une matrice constante inversible.

2.4.4 Réduction dans le cas général

Considérons maintenant le cas général, où on ne suppose plus que les valeurs propres de A sont distinctes. En appliquant le procédé de réduction formelle en matrices par blocs, on se ramène au cas où $A(z)$ est une matrice par blocs, avec les différents blocs correspondant aux valeurs propres distinctes du coefficient dominant A_0. La réduction dans ce cas va être plus compliquée.

Simplifications préliminaires On suppose donc que $A(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty}$, $z \to \infty$, $z \in S$, où A_0 a une seule valeur propre. On va commencer par se ramener au cas où cette valeur propre est 0, i.e. au cas où A est nilpotente. Notons λ la valeur propre de A_0. Alors la transformation

$$Y = Ze^{\lambda z^{q+1}/(q+1)} \tag{2.17}$$

transforme l'équation différentielle $z^{-q}Y' = A(z)Y$ en

$$z^{-q}Z' = (A(z) - \lambda I)Z,$$

et le terme dominant de $A(z) - \lambda I$ est nilpotent. On peut donc supposer A_0 nilpotente. La décomposition de Jordan entraîne que A_0 est semblable à une matrice diagonale par

blocs, où les blocs diagonaux $H_1, \dots, H_s$ sont des blocs de Jordan nilpotents. On peut donc supposer que A_0 est de cette forme, ce qu'on note

$$A_0 = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s.$$

On suppose que $A_0 \neq 0$, ainsi au moins un des blocs de Jordan est de taille ≥ 1.

On applique une nouvelle fois la méthode de réduction précédente donnée par (2.12), (2.13) et (2.14) pour simplifier encore la forme de A. On pose de nouveau $B_0 = A_0$ et $F_0 = I$, et on écrit la relation (2.14) sous la forme

$$A_0 F_n - F_n A_0 = B_n - K_n, \qquad n > 0 \tag{2.18}$$

Cette fois, on ne va plus pouvoir prendre B_n diagonale par blocs. En écrivant toutes les matrices par blocs, e.g. $F_n = (F_n^{jk})_{1 \leq j,k \leq s}$, etc, la relation s'écrit bloc par bloc

$$H_j F_n^{jk} - F_n^{jk} H_k = B_n^{jk} - K_n^{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq s. \tag{2.19}$$

De nouveau, le lemme 2.2.1 entraîne que cette équation n'a des solutions que si les B_n^{jk} sont bien choisies. Plus précisément, il faut des conditions sur, B_n^{jk}, données par le lemme suivant :

Lemme 2.4.5. *On considère l'équation matricielle*

$$HX - KX = M,$$

d'inconnue $X \in M_{h,k}(\mathbb{C})$, où H et K sont des blocs de Jordan nilpotents de tailles respectives h et k, et $M \in M_{h,k}(\mathbb{C})$. On suppose les coefficients des $h-1$ premières lignes de M fixés. Alors il existe une unique valeur $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$ de la dernière ligne de M telle que l'équation a des solutions.

Preuve. La preuve se fait par un calcul direct et est sans grande difficulté (voir [20] p. 101) □

En appliquant ce lemme à (2.19), on peut choisir toutes les lignes des B_n^{ij} sauf la dernière égales à 0. On peut alors résoudre (2.19) successivement pour tout $n > 0$: on obtient une série formelle $\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}$ qui n'est pas convergente en général, mais le théorème principal d'existence asymptotique entraîne l'existence d'une fonction holomorphe $F(z)$ sur $S \cap \{|z| > z_0\}$ qui lui est asymptotique. En résumé, on a pour l'instant montré :

Proposition 2.4.6. *Il existe une matrice $F(z)$ holomorphe sur $S \cap \{|z| > z_0\}$, possédant un développement asymptotique $F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}$, $z \to \infty$, $z \in S$ telle que la transformation $Y = F(z)Z$ change l'équation différentielle $z^{-q}Y' = A(z)Y$ en $z^{-q}Z' = B(z)Z$ où $B(z)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $B(z)$ a un développement asymptotique $B(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{-n}$, $z \to \infty$, $z \in S$.

(ii) B_0 est de la forme $B_0 = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s$, où les H_i sont des blocs de Jordan nilpotents.

(iii) Pour $n > 0$ les seuls coefficients non nuls de B_n sont sur les lignes correspondant aux dernières lignes des blocs H_i.

Transformations de cisaillement On suppose maintenant que $A(z)$ est de la forme décrite par la proposition précédente. Pour continuer à simplifier le problème, on va maintenant appliquer une *transformation de cisaillement* (shearing transformation en anglais). Il s'agit d'une transformation de la forme

$$Y = S(z)Z,$$

où la matrice $S(z)$ est de la forme $S(z) = \mathrm{diag}(1, z^{-g}, \ldots, z^{-(n-1)g})$, où g est un réel > 0 qu'on va choisir plus tard. Cette transformation change l'équation différentielle $z^{-q}Y' = A(z)Y$ en $z^{-q}Z' = B(z)Z$, avec

$$A(z) = S(z)B(z)S^{-1}(z) + z^{-q}S'(z)S^{-1}(z).$$

Le terme dominant de $B(z)$ dépend du choix de g. L'idée est de choisir g de telle sorte que ce terme dominant soit différent de A_0, et si possible ait plusieurs valeurs propres distinctes. Pour voir plus précisément sa dépendance en g, on écrit les coefficients de $B(z)$ qui ne sont pas asymptotiques à 0 sous la forme

$$a_{ik} = z^{-\alpha_{jk}} a^*_{jk}(z), \text{ avec } a^*_{jk}(\infty) \neq 0, \ \alpha_{jk} \geq 0.$$

Du fait de la forme de $A(z)$, au moins un des $\alpha_{j,j+1}$ est non nul, et pour $k \neq j+1$ on a $\alpha_{jk} \geq 1$. Les coefficients de $B(z)$ s'écrivent alors

$$b_{jk}(z) = z^{-\alpha_{jk}+(j-k)g} a^*_{jk}(z) + \delta_{jk}(j-1)gz^{-q-1}. \tag{2.20}$$

Si $\alpha_{jk}(z) \sim 0$, alors on a aussi $b_{jk}(z) \sim 0$, sauf dans le cas $j = k \geq 1$, pour lequel on a $b_{jj}(z) = z^{-q-1}$. Comme pour A, on écrit les coefficients de $B(z)$ qui ne sont pas asymptotiques à 0 sous la forme

$$b_{jk}(z) = z^{-\beta_{jk}(g)} b^*_{jk}(z), \text{ avec } b^*_{jk}(\infty) \neq 0.$$

Les $\beta_{jk}(g)$ sont des fonctions linéaires de g. On a les cas suivants :

1. Pour $k > j+1$, $\beta_{jk}(g) = \alpha_{jk} + (k-j)g$.
2. Pour $k = j+1$, $\beta_{j,j+1}(g) = \alpha_{j,j+1} + g$, et $\beta_{j,j+1}(g) = g$ pour au moins un j.
3. Pour $k = j$, si l'on n'a pas $b_{11} \sim 0$, alors $\beta_{11} = \alpha_{11}$. Par ailleurs pour $j > 1$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \min(\alpha_{jj}, q+1) \text{ si } \alpha_{jj} \text{ est défini,} \\ q+1 \text{ si } \alpha_{jj} \sim 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

4. Pour $k < j$, $\beta_{jk} = \alpha_{jk} - (j-k)g$.

On veut choisir g de telle sorte que $B_0 \neq A_0$. On détermine g de la façon suivante. On trace sur un graphique d'abscisse g et d'ordonnée β les droites $\beta_{jk}(g)$ pour tous j, k. Parmi les droites $\beta_{jk}(g)$ pour $k > j$ se trouve la droite $\beta = g$, et toutes les autres sont au-dessus (pour $g > 0$). Les droites $\beta_{jk}(g)$ pour $k \leq j$ ont une pente négative ou nulle, et une ordonnée à l'origine strictement positive, donc elles coupent la droite $b = g$ en un point d'abscisse strictement positive. On appelle g_0 la plus petite abscisse de ces points d'intersection, et on choisit $g = g_0$. Notons que g_0 est un nombre rationnel, pas forcément entier.

Ce choix de g est tel que la matrice B_0^* définie par

$$B_0^* = \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in S}} z^{g_0} B(z)$$

existe, et $B_0^* \neq A_0$. Plus précisément, on voit sans peine que B_0 coïncide avec A_0 au-dessus de la diagonale, mais au moins un coefficient de B_0^* est différent sur la diagonale ou en-dessous.

Le procédé a fait apparaître des exposants non entiers dans la nouvelle équation différentielle

$$z^{-(q-g_0)} Z' = z^{g_0} B(z) Z.$$

Pour se ramener à des exposants entiers, on doit faire le changement de variable

$$z = \alpha t^p, \tag{2.22}$$

où p est le dénominateur de g_0 sous forme irréductible, et $\alpha = p^{1/(g_0-q-1)}$, de telle sorte qu'on arrive à une équation de la forme

$$t^{-h}\frac{dZ}{dt} = C(t)Z, \tag{2.23}$$

avec $h = p(q+1-g_0)-1$, et où la matrice $C(t)$ a un développement asymptotique $C(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{-n}$, $t \to \infty$ dans le secteur image de S par le changement de variable (2.22), et $C_0 = B_0^*$.

Intéressons-nous à la nouvelle équation $t^{-h}\frac{dZ}{dt} = C(t)Z$. Si $h < 0$, alors on est dans le cas d'un pôle d'ordre 1 en ∞ (si $h = -1$), ou bien il n'y a pas de singularité (si $h \leq -2$), et on sait trouver une solution fondamentale. Si $h \geq 0$ et que C_0 ait plusieurs valeurs propres distinctes, on peut appliquer le procédé déjà utilisé pour réduire l'ordre du système.

Il se peut cependant que l'on ne se retrouve pas dans cette situation favorable, i.e. que $h \leq 0$ et C_0 possède une seule valeur propre. Heureusement, il se trouve que, quitte à réaliser plusieurs transformations de cisaillement successives, on va toujours pouvoir réduire le rang ou l'ordre de l'équation différentielle. Contentons-nous d'esquisser la fin de la preuve, sans donner tous les détails, qu'on peut trouver dans [20]. On montre que

Lemme 2.4.7. *Supposons qu'en répétant la suite de transformations suivante : application de la proposition 2.4.6, puis transformation de cisaillement, puis diagonalisation de C_0 sous forme de Jordan, on ne rencontre jamais le cas favorable où l'on peut réduire l'ordre ou le rang du système. Alors après un nombre fini de transformations la matrice C_0 est un bloc de Jordan nilpotent.*

Ainsi, dans le cas le plus défavorable, l'application de plusieurs transformations de cisaillement successives permet de se ramener au cas où C_0 est un bloc de Jordan nilpotent. On montre alors qu'une dernière transformation de cisaillement fait l'affaire : ou bien cette transformation réduit le rang de l'équation, ou bien la nouvelle matrice C_0 obtenue a plusieurs valeurs propres et on peut réduire l'ordre du système.

Remarque. Souvenons-nous que lorsque nous avons traité le cas où le point singulier est un pôle simple, nous avons dû supposer que la matrice A_0 ne possède pas deux valeurs propres distinctes différant d'un entier. En fait, on peut toujours se ramener à cette situation en appliquant une certaine transformation de cisaillement (voir [20] p. 94). Tous les cas sont donc bien traités par ce raisonnement.

Solution fondamentale Résumons les transformations effectuées sur l'équation différentielle initiale. Elles consistent en

1. Des changements de variables de la forme $Y = FZ$, où la fonction F possède un développement asymptotique en $z^{-1/s}$ pour un certain entier s.
2. La multiplication de certaines composantes de l'inconnue par des facteurs exponentiels de la forme $\exp(az^\alpha)$, avec $a \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$.
3. Des changements de variable de la forme (2.22).

La composition de toutes les transformations effectuées est donc de la forme

$$z = t^p, \quad p \text{ entier } > 0, \tag{2.24}$$

$$Y = F(t)e^{Q_1(t)}Z, \tag{2.25}$$

où la fonction $F(t)$ est définie sur un certain secteur T, et a un dévelppement asymptotique sur T pour $x \to \infty$ en puissances de t^{-1}, et où la matrice $Q_1(t)$ est diagonale et polynomiale en t.

La nouvelle équation obtenue par cette transformation est

$$t^{-h}\frac{dZ}{dt} = B(t)Z, \tag{2.26}$$

où la matrice $B(t)$ est une matrice par bloc, telle que chaque bloc ou bien est de taille 1, correspondant à une équation scalaire, ou bien l'équation différentielle correspondant à ce bloc a un pôle simple ou bien n'a pas de pôle, de telle sorte qu'on sait la résoudre.

L'équation différentielle (2.26) possède donc une solution fondamentale de la forme

$$\Psi(t) = H(t)(Z)t^G e^{Q_2(t)},$$

où $H(t)$ possède un développement asymptotique, G est une matrice constante, et $Q_2(t)$ est polynomiale et diagonale. Ces matrices sont diagonales par blocs (avec la même partition que B). Finalement, on obtient la solution fondamentale suivante de l'équation de départ :

Théorème 2.4.8. *Soit $A(z)$ une matrice holomorphe en ∞. Alors dans tout secteur S assez étroit, l'équation différentielle $z^{-q}Y' = A(z)Y$ possède une solution fondamentale de la forme*

$$\Phi(z) = F(z)Ge^{Q(z)}, \tag{2.27}$$

où $Q(z)$ est une matrice diagonale en $z^{1/p}$ pour un certain entier p, G est une matrice constante, et $F(z)$ admet dans S un développement asymptotique en puissances de $z^{-1/p}$ quand $z \to \infty$.

Notons les différences avec le cas où les valeurs propres sont distinctes : la matrice G n'est pas nécessairement diagonale, et Q n'est plus un polynôme en z mais en $z^{1/p}$, il n'est pas donné directement par le coefficient dominant de A.

3 Direction singulières et matrices de Stokes

3.1 Cas des fibrés vectoriels

Les solutions fondamentales que nous avons trouvées vont nous permettre de classifier les connexions à transformation de jauge près. Dans ce paragraphe, on considère une connexion correspondant à une équation différentielle à singularité irrégulière en $z = \infty$

$$z^{-q}Y' = AY,$$

avec $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$ matrice $r \times r$ holomorphe en $z = \infty$. On suppose aussi que A_0 a r valeurs propres distinctes, le cas général étant plus complexe. Par ailleurs on va se restreindre dans toute cette partie à des transformations de jauge $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}$ holomorphes en $z = \infty$ telles que $F(\infty) = F_0 = I$, qui constituent un sous-groupe du groupe de jauge (dans la terminologie de [1], elles sont appelées des transformations de Birkhoff). Cela a l'intérêt de simplifier la classification, et la classification des connexions sous l'action du groupe de jauge tout entier s'en déduit assez aisément.

Résumons à l'avance les résultats que l'on va obtenir. On va voir que les matrices Λ et $Q(z)$ qui apparaissent dans la solution fondamentale formelle de l'équation sont invariantes par transformation de jauge et caractérisent les classes d'équivalence *formelle* de connexions. Mais ces données ne suffisent pas à caractériser les "vraies" classes d'équivalence analytique. Pour ce faire, on va étendre les solutions fondamentales holomorphes données par le théorème principal d'existence asymptotique à des secteurs d'angle plus grand que $\pi/(q+1)$. Les solutions fondamentales dans ces secteurs élargis sont alors uniques. La donnée des multiplicateurs de Stokes entre les secteurs successifs va caractériser les classes d'équivalence de connexions.

3.1.1 Classification formelle

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A_0, qu'on suppose donc distinctes, et supposons qu'elles sont ordonnées dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire que $\operatorname{Re}\lambda_k < \operatorname{Re}\lambda_{k+1}$ ou bien $\operatorname{Re}\lambda_k = \operatorname{Re}\lambda_{k+1}$ et $\operatorname{Im}\lambda_k < \operatorname{Im}\lambda_{k+1}$. Pour chaque matrice A_0 fixons à l'avance un choix de matrice de passage F_0 pour diagonaliser A_0, i.e. tel que $F_0^{-1}A_0F = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = D$. D'après la partie précédente on sait que l'équation $z^{-q}Y' = AY$ possède une solution fondamentale formelle de la forme

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)},$$

où les matrices Λ et $Q(z)$ sont déterminées de manières unique par l'algorithme de réduction formelle (on va parfois noter Λ_A et $Q_A(z)$ quand on considérera plusieurs matrices) et $\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^{-n}$ est une série formelle de terme constant F_0. Avoir ce terme constant fixé rend $F(z)$ unique : en effet si $\tilde{F}z^{\Lambda}e^{Q(z)}$ est une autre solution fondamentale formelle où la série formelle $\tilde{F}(z)$ a F_0 pour terme constant, alors il existe une matrice constante C inversible telle que

$$\hat{F}(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)} = \tilde{F}(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}C.$$

En comparant les facteurs exponentiels qui apparaissent dans chaque coefficient, comme le terme dominant de $Q(z)$ est proportionnel à $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ si bien que les facteurs exponentiels sont distincts, on obtient que C est nécessairement diagonale. La condition sur le coefficient constant de $\hat{F}$ et $\tilde{F}$ entraîne alors $C = I$.

Si l'équation $z^{-q}Z' = B(z)Z$ est formellement équivalente à $z^{-q}Y' = A(z)Y$ via la transformation $Y = T(z)Z$ telle que $T_0 = I$, alors $z^{-q}Z' = B(z)Z$ a une solution fondamentale formelle de la forme

$$\hat{F}_B(z)z^{\Lambda_B}e^{Q_B(z)},$$

où Q_B et Q_A ont le même coefficient dominant $\frac{z^{q+1}}{q+1}D$, et $\hat{F}_B(\infty) = \hat{F}_A(\infty) = F_0$. Alors il existe de nouveau une matrice constante C inversible telle que

$$\hat{F}_A(z)z^{\Lambda_A}e^{Q_A(z)}C = T(z)\hat{F}_B(z)z^{\Lambda_B}e^{Q_B(z)}.$$

Comme précédemment, en regardant les facteurs exponentiels qui apparaissent aux deux membres dans chaque coefficient, on obtient que C est diagonale, puis que les polynômes Q_A et Q_B sont égaux, puis que $\Lambda_A = \Lambda_B$ et finalement $C = I$. Par conséquent on a

$$\hat{F}_A(z) = T(z)\hat{F}_B(z).$$

Ainsi les matrices Λ_A et Q_A ne dépendent que de la classe d'équivalence formelle de A. Inversement, si $A(z)$ et $B(z)$ sont telles que $A_0 = B_0$, $\Lambda_A = \Lambda_B$ et $Q_A = Q_B$ alors elles sont équivalentes via la transformation formelle $T(z) = \hat{F}_A(z)\hat{F}_B^{-1}(z)$. Nous avons donc montré :

Proposition 3.1.1. *Deux équations différentielles $z^{-q}Y' = A(z)Y$ et $z^{-q}Z' = B(z)$ sont reliées par une transformation de jauge formelle si et seulement si $A_0 = B_0$, $\Lambda_A = \Lambda_B$ et $Q_A(z) = Q_B(z)$.*

3.1.2 Directions de Stokes et solutions fondamentales dans des secteurs élargis

On cherche maintenant à construire des solutions fondamentales analytiques asymptotiques à la solution fondamentale formelle sur des secteurs élargis. Pour cela, il nous faut introduire la notion de *directions de Stokes*. Rappelons que le coefficient dominant du polynôme $Q_A(z)$ est $\frac{z^{q+1}}{q+1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$.

Définition 3.1.2. Les *directions de Stokes* de la connexion $d - z^q A(z)dz$ sont les directions pour lesquelles

$$\mathrm{Re}((\lambda_j - \lambda_k)z^{q+1}) = 0$$

pour un certaine paire (j, k), $j \neq k$.

Chaque paire (j, k) définit une famille de $2(q + 1)$ directions de Stokes espacées d'un angle $\pi/(q + 1)$. Le nombre de directions de Stokes distinctes est donc de la forme $M = 2l(q + 1)$ où l'entier l est le nombre de familles distinctes de directions de Stokes espacées de $\pi/(q + 1)$.

Les directions de Stokes apparaissent naturellement pour la raison suivante. Souvenons-nous que le coefficient dominant du polynôme $Q_A(x)$ est $\frac{z^{q+1}}{q+1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Ainsi les coefficients des solutions de l'équation $z^{-q}Y' = AZ$ sont des sommes de termes où apparaissent les facteurs exponentiels $\exp(\lambda_i z^{q+1})$. Parmi ces facteurs, ceux qui dominent lorsque $z \to \infty$ dans une direction fixée sont ceux pour lesquels $\mathrm{Re}(\lambda_j z^{q+1})$ est maximal. Ainsi les directions de Stokes sont les directions de part et d'autre desquelles les termes exponentiels dominants dans les solutions de l'équation différentielle changent (voir figure 1).

Numérotons les directions de Stokes successives $d_1, \ldots, d_M$ par ordre d'arguments croissants $0 \leq \tau_1, \ldots, \tau_M < 2\pi$. Il va être commode d'étendre la numérotation de façon périodique en posant $d_{k+M} = d_k$, et $\tau_{k+M} = \tau_k + 2\pi$.

On définit de manière similaire les directions anti-Stokes, qui vont nous servir plus loin.

Définition 3.1.3. Les *directions anti-Stokes*, aussi appelées *directions singulières* de la connexion $d - z^q A dz$ sont les directions pour lesquelles

$$(\lambda_j - \lambda_k)z^{q+1} \in \mathbb{R}_{<0}$$

pour un certaine paire (j, k), $j \neq k$.

La famille des directions anti-Stokes est ainsi décalée d'un angle $\pi/2(q+1)$ par rapport à la famille des directions de Stokes.

Les directions de Stokes vont jouer un rôle lorsqu'on chercher à étendre une solution fondamentale à un secteur plus large, du fait du résultat suivant.

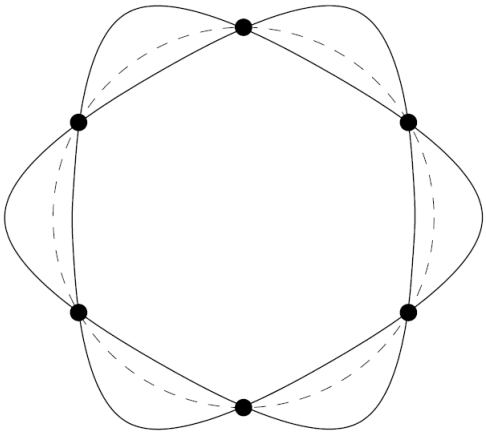


FIGURE 1 – Définition des directions de Stokes. Les deux courbes en traits pleins correspondent aux modules de deux facteurs exponentiels de la forme $\exp\left(\lambda_j z^k\right)$, $j = 1, 2$ sur le cercle unité (le dessin est fait ici pour $k = 3$), ce qui correspond à $Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)z^k$. Les directions de Stokes sont les $2k$ directions où les deux courbes se croisent (figure tirée de [4]).

Lemme 3.1.4. *Soit $\Phi(z)$ une solution fondamentale de l'équation $z^{-q}Y' = A(z)Y$, asymptotique à la solution fondamentale formelle $\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z)z^{\Lambda}\exp(Q(z))$ lorsque $z \to \infty$ dans un secteur S de la forme $S = \{\alpha < \arg z < \beta,\ |z| > z_0\}$ avec $\beta - \alpha < 2\pi$. Si $\tilde{S} = \{\tilde{\alpha} < \arg z < \tilde{\beta},\ |z| > z_0\}$ est un autre secteur de cette forme, tel que $\tilde{\beta} - \tilde{\alpha} < \pi/(q+1)$, que l'intersection $S \cap \tilde{S}$ soit non vide et simplement connexe, et que $\tilde{S}$ ne contienne aucune direction de Stokes de l'équation différentielle, alors $\Phi(z)$ est asymptotique à $\hat{\Phi}(z)$ sur $S \cup \tilde{S}$ pour $z \to \infty$.*

Preuve. Soit $\tilde{\Phi}(z)$ une solution fondamentale analytique de $z^{-q}Y' = A(z)Y$ pour $z \in \tilde{S}$ telle que $\tilde{\Phi}(z) \sim \hat{\Phi}(z),\ z \to \infty,\ z \in \tilde{S}$. Alors il existe une matrice constante inversible C telle que $\Phi(z) = \tilde{\Phi}(z)C$ pour $z \in S \cap \tilde{S}$, ce qui fournit un prolongement analytique de Φ à $\tilde{S}$. Comme Φ et $\tilde{\Phi}$ ont le même développement asymptotique, on a

$$z^{\Lambda}e^{Q(z)}Ce^{-Q(z)}z^{-\Lambda} \sim I,\ z \to \infty,\ z \in S \cap \tilde{S}.$$

Le point clef est que, puisque $\tilde{S}$ ne contient aucune direction de Stokes, l'ordre de dominance des facteurs exponentiels ne change pas sur $\tilde{S}$, si bien que ce développement asymptotique est en fait valide sur tout $\tilde{S}$. On a donc pour $z \in \tilde{S}$

$$\begin{aligned}
\Phi(z)z^{-\Lambda}e^{-Q(z)} &= \tilde{\Phi}(z)Cz^{-\Lambda}e^{-Q(z)} \\
&= \tilde{\Phi}(z)z^{-\Lambda}e^{-Q(z)}z^{\Lambda}e^{Q(z)}Ce^{-Q(z)}z^{-\Lambda} \\
&\sim \tilde{\Phi}(z)z^{-\Lambda}e^{-Q(z)} \\
&\sim \hat{F}(z),
\end{aligned}$$

donc le développement asymptotique pour $\Phi(z)$ est bien valide sur tout $S \cup \tilde{S}$. □

Ce lemme va nous permettre d'étendre une solution fondamentale à des secteurs d'angle supérieur à $\pi/(q+1)$. L'intérêt est que sur de tels secteurs la solution fondamentale devient unique.

Lemme 3.1.5. *Soit S un secteur d'angle $> \pi/(q+1)$, et $\Phi(z) = F(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}$, $\tilde{\Phi}(z) = \tilde{F}(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}$ deux solutions fondamentales de l'équation $x^{-q}Y' = A(z)Y$ asymptotiques à la solution fondamentale formelle $\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z)z^{\Lambda}\exp(Q(z))$ pour $z \to \infty$ sur S. Alors $\Phi(z) = \tilde{\Phi}(z)$.*

Preuve. Il existe une matrice constante inversible C telle que $\tilde{\Phi} = \Phi C$, c'est-à-dire

$$\tilde{F}(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)} = F(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)}C,$$

avec $F(z), \tilde{F}(z) \sim \hat{F}(z),\ z \to \infty, z \in S$. Alors

$$e^{Q(z)}z^{\Lambda}Cz^{-\Lambda}e^{-Q(z)} \sim I, z \to \infty, z \in S. \tag{3.1}$$

Notons $Q(z) = \mathrm{diag}(q_1(z), \ldots, q_r(z))$ et $C = (c_{ij})$. Alors le coefficient en position (i, j) dans la relation (3.1) est

$$e^{q_i(z)-q_j(z)}z^{\lambda_i-\lambda_j}c_{ij}.$$

On en déduit que $c_{ii} = 1$ pour tout i. Cela entraîne aussi que $c_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. En effet comme le secteur S a un angle d'ouverture $> \pi/(q+1)$, on voit qu'il existe forcément une direction dans S dans laquelle le terme dominant de $\mathrm{Re}(q_i(z) - q_j(z))$ est strictement positif, d'où $c_{ij} = 0$. □

Associons à chaque direction de Stokes d_k, $1 \leq k \leq M$ le secteur

$$S_k = \{\tau_{k-1} < \arg z < \tau_{k+l}\} \cap \{|z| > z_0\}$$

ainsi que le sous-secteur

$$\tilde{S_k} = \{\tau_k - \varepsilon/2 < \arg z < \tau_{k+l} - \varepsilon\} \cap \{|z| > z_0\},$$

avec ε suffisamment petit. Le secteur $\tilde{S}_k$ est d'angle strictement inférieur à $\pi/(q+1)$ donc le théorème principal d'existence asymptotique entraîne l'existence d'une solution fondamentale $Y_k(z)$ de l'équation différentielle sur $\tilde{S}_k$ telle que

$$\Phi_k(z) \sim \hat{F}(z)z^{\Lambda}e^{Q(z)},\ z \to \infty,\ z \in \tilde{S}_k.$$

Dans cette expression, on choisit pour exprimer z^{Λ} la détermination du logarithme correspondant au choix de l'argument $\tau_{k-1} < \arg z < \tau_{k+l}$ sur S_k. On notera $(z^{\Lambda})_k$ pour préciser de quel secteur il s'agit quand il y aura risque de confusion. On pose également $(z^{\Lambda})_{M+1} = (z^{\Lambda})_1$.

Comme on ne rencontre aucune direction de Stokes en élargissant $\tilde{S}_k$ en S_k, le lemme 3.1.4 entraîne que cette solution peut être prolongée analytiquement à S_k, et que le développement asymptotique est valide sur tout S_k. De plus comme S_k est d'angle supérieur à $\pi/(q+1)$ le lemme 3.1.5 entraîne que cette solution fondamentale Φ_k sur S_k est unique.

L'intersection

$$S_{k,k+1} := S_k \cap S_{k+1} = \{\tau_k < \arg z < \tau_{k+1}\} \cap \{|z| > z_0\}$$

étant non vide, il existe une unique matrice constante inversible K_k telle que

$$\Phi_k(z) = \Phi_{k+1}(z)K_k, \quad z \in S_{k,k+1}, \tag{3.2}$$

pour $1 \leq k \leq M$. La matrice K_k est appelée le *facteur de Stokes* associé à la direction de Stokes d_k. D'après le lemme précédent les facteurs de Stokes sont uniquement déterminés par A. En continuant pour l directions de Stokes consécutives on obtient

$$\Phi_{(p-1)l+1}(z) = \Phi_{pl+1}(z)K_{pl}\ldots K_{(p-1)l+1}, \quad z \in S_{(p-1)l+1,pl+1},$$

où $\in S_{(p-1)l+1,pl+1} = \{\tau_{pl} < \arg z < \tau_{pl+1}\} \cap \{|z| > z_0\}$, pour tout $1 \leq p \leq 2(q+1)$. On définit

$$C_p = K_{pl}\ldots K_{(p-1)l+1}, \quad 1 \leq p \leq 2(q+1). \tag{3.3}$$

Les C_p sont appelés les *multiplicateurs de Stokes* de la connexion $d - z^q A(z)dz$; ce sont ces données supplémentaires qui vont caractériser les classes d'équivalence des connexions.

Proposition 3.1.6. *Les matrices C_p, $1 \leq p \leq 2(q+1)$ sont triangulaires : les C_{2s-1}, $1 \leq s \leq r$ sont triangulaires inférieures et les C_{2s}, $1 \leq s \leq r$ sont triangulaires supérieures. De plus pour $p \neq 2(q+1)$ la diagonale de C_p est* $\operatorname{diag} C_p = I$, *et* $\operatorname{diag} C_{2(q+1)} = \exp(2i\pi\Lambda)$.

Preuve. La définition des C_p entraîne

$$(z^{\lambda})_{pl+1} e^{Q(z)} C_p e^{-Q(z)} (z^{-\Lambda})_{(p-1)l+1} \sim I, \quad z \to \infty,\ z \in S_{(p-1)l+1,pl+1}. \tag{3.4}$$

En notant $C_p = (c_{ij}^{(p)})_{ij}$, cela donne pour $i \neq j$

$$c_{ij}^{(p)} e^{q_i(z)-q_j(z)} z^{\lambda_i-\lambda_j} \sim 0 \quad z \to \infty,\ z \in S_{(p-1)l+1,pl+1}.$$

Fixons $i \neq j$ et notons $\lambda_i - \lambda_j = \rho e^{i\alpha}$, $\rho > 0$. Comme les λ_i sont rangées dans l'ordre lexicographique, on a

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{2} \text{ si } i < j, \quad \frac{-\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ si } j < i.$$

Notons $z = te^{i\theta}$, $t > 0$. Le terme dominant de $q_i(z) - q_j(z)$ quand $t \to \infty$ est donné par

$$\frac{1}{q+1} \rho t^{q+1} e^{i(\alpha+(q+1)\theta)},$$

si bien que $\operatorname{Re}((q_i(z) - q_j(z))$ est du signe de $\cos(\alpha + (q+1)\theta)$. Si $i < j$ i.e $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$, on voit que ce signe est positif pour p pair et négatif si p impair, si $j < i$ c'est l'inverse. Donc les C_{2s-1} sont triangulaires inférieures et les C_{2s} sont triangulaires supérieures.

Pour ce qui est de la diagonale, la relation (3.4) entraîne que $\operatorname{diag} C_p = I$ lorsque $(z^{\lambda})_{pl+1} = (z^{-\Lambda})_{(p-1)l+1}$, i.e. lorsque les déterminations du logarithme sont les mêmes. C'est le cas pour $p \neq 2(q+1)$. Pour $p = 2(q+1)$ on a que $(z^{\lambda})_{pl+1} = (z^{\lambda})_{M+1} = (z^{-\Lambda})_{(p-1)l+1} \exp(-2i\pi\Lambda)$, et on obtient que $\operatorname{diag} C_{2(q+1)} = \exp(2i\pi\Lambda)$. □

Théorème 3.1.7. *(i) Les multiplicateurs de Stokes $C_1, \ldots, C_{2(q+1)}$ sont invariants par transformation de jauge, i.e. ne dépendent que de la classe d'équivalence de l'équation différentielle $z^{-q}Y' = A(z)Y$.*

(ii) Deux équations différentielles de la forme $z^{-q}Y' = A(z)Y$ sont reliées par une transformation de jauge si et seulement si elles ont les mêmes Λ, $Q(z)$ et les mêmes multiplicateurs de Stokes $C_1, \ldots, C_{2(q+1)}$.

Preuve. Montrons d'abord *(i)*. Soient $z^{-q}Y' = A(z)Y$, et $z^{-q}\tilde{Y}' = \tilde{A}(z)\tilde{Y}$ reliées par une transformation de jauge $Y = T(z)\tilde{Y}$. En gardant les notations précédentes pour les solutions fondamentales formelles, on a

$$T(z)\hat{F}_{\tilde{A}}(z) = \hat{F}_A(z). \tag{3.5}$$

Les deux équations ont les mêmes Λ et $Q(z)$, donc les mêmes directions de Stokes. Notons $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2(q+1)}$ et $\tilde{\Phi}_1, \ldots, \tilde{\Phi}_{2(q+1)}$ les solutions fondamentales respectives des deux équations asymptotiques aux solutions fondamentales formelles dans les secteurs $S_{(p-1)l+1}$, $1 \leq p \leq 2(q+1)$. On a

$$\Phi_p(z) \sim \hat{F}_A z^{\Lambda} e^{Q}(z), \qquad \tilde{\Phi}_p \sim \hat{F}_{\tilde{A}} z^{\Lambda} e^{Q(z)},$$

pour $z \to \infty$ sur $S_{(p-1)l+1}$. Or $T(z)\tilde{\Phi}_p(z)$ est une solution fondamentale pour $z^{-q}Y' = A(z)Y$ sur $S_{(p-1)l+1}$, et (3.5) entraîne que

$$T(z)\tilde{\Phi}_p(z) \sim \hat{F}_A z^{\Lambda} e^{Q}(z).$$

Par unicité de la solution fondamentale analytique sur $S_{(p-1)l+1}$ (puisque $S_{(p-1)l+1}$ est d'angle supérieur à $\pi/(q+1)$), on en déduit que $T(z)\tilde{\Phi}_p(z) = \Phi_p(z)$ pour tout $1 \leq p \leq 2(q+1)$. Par conséquent

$$C_p = \Phi_{p+1}^{-1}\Phi_p = \tilde{\Phi}_{p+1}^{-1}\tilde{\Phi}_p = \tilde{C}_p.$$

Les C_p sont donc bien invariants de jauge.

Montrons maintenant *(ii)*. Soient $z^{-q}Y' = A(z)Y$, et $z^{-q}\tilde{Y}' = \tilde{A}(z)\tilde{Y}$ avec les mêmes Λ, $Q(z)$ et C_p, $1 \leq p \leq 2(q+1)$. Notons de nouveau Φ_p et $\tilde{\Phi}_p$ les uniques solutions fondamentales asymptotiques sur les secteurs $S_{(p-1)l+1}$ aux solutions fondamentales formelles respectives $\hat{F}_A z^{\Lambda} e^{Q}(z)$, $\hat{F}_{\tilde{A}} z^{\Lambda} e^{Q(z)}$. Posons

$$T(z) = \Phi_1(z)\tilde{\Phi}_1^{-1}(z)$$

pour $z \in S_1$. On a $\Phi_1 = \Phi_2 C_1$ et $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_2$ sur $S_{1,l+1}$, on obtient ainsi un prolongement analytique sur S_{l+1}

$$T(z) = \Phi_2(z)C_1C_1^{-1}\tilde{\Phi}_2^{-1}(z) = \Phi_2(z)\tilde{\Phi}_2^{-1}$$

En continuant, on obtient le prolongement

$$T(z) = \Phi_p(z)\tilde{\Phi}_p^{-1}(z)$$

sur le secteur $S_{(p-1)l+1}$ pour tout $1 \leq p \leq 2(q+1)$, et finalement on faisant un tour complet autour de ∞ on retombe sur

$$T(z) = \Phi_1(z)\tilde{\Phi}_1^{-1}(z)$$

sur S_1. Ainsi $T(z) \sim I$ lorsque $z \to \infty$ dans toute direction autour de ∞. La proposition 2.3.3 entraîne donc que $T(z) \to_{z\to\infty} I$ et que T est holomorphe en ∞. Ainsi T est une transformation de jauge analytique reliant $z^{-q}Y' = A(z)Y$, et $z^{-q}\tilde{Y}' = \tilde{A}(z)\tilde{Y}$. □

3.2 Transposition aux fibrés principaux

La théorie des matrices de Stokes, initialement développée pour des fibrés vectoriels, a été généralisée par Boalch au cas des G-fibrés principaux [3]. Nous allons présenter les énoncés que l'on obtient pour les fibrés principaux, sans en donner les démonstrations, en effet la démarche générale est similaire au cas des fibrés vectoriels, même si les preuves sont plus compliquées.

Le cadre général est le suivant. Soit G un groupe de Lie complexe réductif. On fixe T un tore maximal de G, et on note $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ les algèbres de Lie correspondantes. On note $\mathcal{R} \in \mathfrak{t}^*$ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$, et on note

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{R}} \mathfrak{g}_\alpha$$

la décomposition de Cartan correspondante.

Soit A une connexion méromorphe sur un G-fibré principal $P \to \Delta$ au-dessus du disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$, ayant un pôle d'ordre $k \geq$ en 0 et aucun autre pôle. Le fibré est trivialisable, aussi en choisissant une section globale $s : \Delta \to P$ la connexion A est déterminée par la 1-forme méromorphe à valeurs dans $\mathfrak{g}$ $A^s := -s^*A$. On a $A^s = A^h dz/z^k$, avec $A^h : \Delta \to \mathfrak{g}$ holomorphe. On suppose que $A_0 := A^h(0) \in \mathfrak{t}$, et que $\alpha(A_0) \neq 0$ pour toute racine $\alpha \in \mathcal{R}$. Cette dernière condition est l'équivalent pour les fibrés principaux de la condition demandant que A_0 ait des valeurs propres distinctes dans la section précédente. On considère des transformations de jauge $F : \Delta \to G$ agissant de la façon suivante : F transforme A en

$$F[A] = FAF^{-1} + dFF^{-1}. \tag{3.6}$$

On notera $\mathcal{G}$ le groupe de jauge, i.e. le groupe des applications holomorphes $F : \Delta \to G$, et $G[[z]]$ le groupe des transformations de jauge formelles.

La réduction formelle est donnée dans ce cadre par l'énoncé suivant.

Théorème 3.2.1. *Soit A une connexion sur P satisfaisant les hypothèses ci-dessus, de coefficient dominant $A_0 \in \mathfrak{t}$. Alors il existe une unique transformation de jauge formelle $\hat{F} \in G[[z]]$ avec $\hat{F}(0) = 1_G$ des éléments uniques $A_0^0, \dots, A_{k-2}^0, \Lambda \in \mathfrak{t}$ avec $A_0^0 = A_0$ tels que l'image de $A^0 := (A_0^0/z^k + \cdots + A_{k-2}^0/z^2 + \Lambda/z)dz$ par $\hat{F}$ soit*

$$\hat{F}[A^0] = A^s.$$

De plus A^0 ne change pas si l'on applique à A une transformation de jauge $F \in \mathcal{G}$ avec $F(0) = 1_G$.

On peut réécrire le *type formel* A^0 sous une forme plus semblable à ce qu'on avait dans le cas des fibrés vectoriels, en écrivant $A^0 = dQ + \Lambda dz/z$, avec $Q := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{z^{j-k}}{j-k} A_{j-1}^0$. Le coefficient dominant de Q est $q := \frac{1}{1-k} A_0 z^{1-k}$. La connexion possède alors la solution fondamentale formelle

$$\hat{\Phi}(z) = \hat{F}(z) z^{\Lambda} e^{Q(z)}.$$

La définition des directions de Stokes et anti-Stokes s'adapte également. On va cette fois plutôt travailler avec les directions anti-Stokes. On notera $\mathbb{A}$ l'ensemble des directions anti-Stokes Dans le cas des fibrés vectoriels, qui correspond à un fibré principal avec $G = GL_n(\mathbb{C})$, les directions étaient données par $\mathrm{Re}(q_i(z) - q_j(z)) = 0$ pour un certain couple (i, j). Or on observe que les nombres $q_i(z) - q_j(z)$ sont précisément les $\alpha(q(z))$, où α est une racine de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan standard constituée par les matrices diagonales. Ceci suggère ce qui va être la définition des directions anti-Stokes dans le cas où G est quelconque :

Définition 3.2.2. Les directions anti-Stokes de la connexion A sont les directions suivant lesquelles $\mathrm{Re}(\alpha(q(z)) < 0$ pour un certaine racine $\alpha \in \mathcal{R}$.

Si $\alpha \in \mathcal{R}$, on a $\alpha(q(z)) = \frac{1}{1-k}\alpha(A_0) z^{1-k}$, donc si $\alpha(A_0) \neq 0$, sont associées à α ou $-\alpha$ $2(k-1)$ directions anti-Stokes séparées d'un angle $\pi/(k-1)$. Le nombre total de directions de Stokes est donc de la forme $M = 2(k-1)l$ où l est un entier. On appelle *demi-période* une famille de l directions anti-Stokes consécutives. On numérote les directions de Stokes $d_1, \dots, d_M$ par arguments croissants $0 \leq \tau_1 < \cdots < \tau_M < 2\pi$.

Introduisons de nouveau des secteurs particuliers : on définit le secteur $S_i = \{\tau_i < \arg z < \tau_{i+1}\}$, ainsi que le secteur élargi $\hat{S}_i = \{\tau_i - \pi/2(k-2) < \arg z < \tau_{i+1} + \pi/2(k-2)\}$. On fixe toujours le choix d'une détermination du logarithme dans chaque secteur. De nouveau, on a l'existence de solutions fondamentales analytiques uniques sur les secteurs élargis.

Théorème 3.2.3. *Soit $\hat{F}$ une transformation de jauge formelle comme dans le théorème précédent. Alors il existe une unique application holomorphe $\Sigma_i(\hat{F}) : S_i \to G$ pour tout i telle que*

1. *$\Sigma_i(\hat{F})[A^0] = A$,*
2. *$\Sigma_i(\hat{F})$ se prolonge analytiquement sur $\hat{S}_i$, et $\Sigma_i(\hat{F}) \sim \hat{F}$ en $z = 0$ sur $\hat{S}_i$.*

On a alors sur $\hat{S}_i$ la solution fondamentale $\Phi_i := \Sigma_i(\hat{F}) z^{\Lambda} e^{Q}(z) : \hat{S}_i \to G$, et on définit de nouveau les facteurs de Stokes comme les matrices de passage entre les Φ_i :

Définition 3.2.4.
- Pour $1 \leq i < M$, on définit le facteur de Stokes $K_{i+1} := \Phi_{i+1}^{-1}\Phi_i \in G$ et pour $i = 1$, $K_1 := \Phi_1^{-1}\Phi_M e^{-2i\pi\Lambda}$.
- Pour $1 \leq i \leq 2(k-2)$ on définit le multiplicateur de Stokes C_i comme le produit des l facteurs de Stokes consécutifs

$$C_i := K_{il} \dots K_{(i_1)l+1}$$

de telle sorte que $\Phi_{il} = \Phi_{(i+1)l} C_{i+1}$ sur $\hat{S}_{il} \cap \hat{S}_{(i+1)l}$.

Dans le cas $G = GL_n(\mathbb{C})$ les multiplicateurs de Stokes S_i étaient des matrices triangulaires supérieures ou inférieures avec des 1 sur la diagonale, la généralisation de ceci à G quelconque est que les S_i vivent dans certains sous-groupes particuliers de G.

Définition 3.2.5. Soit d une direction anti-Stokes, on note $\mathcal{R}(d)$ l'ensemble des racines associées à d, i.e. $\mathcal{R}(d) = \{\alpha \in \mathcal{R},\ \alpha(Q(z)) \text{ réel} < 0 \text{ sur } d\}$. Le groupe des facteurs de Stokes associé à d est le groupe

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_d(A^0) := \prod_{\alpha \in \mathcal{R}(d)} \exp(\mathfrak{g}_\alpha) \subset G.$$

Si $\mathbf{d}$ est une demi-période, la groupe des multiplicateurs de Stokes associé à $\mathbf{d}$ est

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_{\mathbf{d}}(A^0) = \prod_{d \in \mathbf{d}} \mathbb{S}\mathrm{to}_d(A^0) \subset G.$$

Lemme 3.2.6. *Avec les notations précédentes, $K_i \in \mathbb{S}to_{d_i}(A^0)$, et $C_j \in \mathbb{S}to_{\mathbf{d}}(A^0)$ avec $\mathbf{d} = (d_{(j-1)l+1}, \ldots, d_{jl})$.*

Dans le cas $G = GL_r(\mathbb{C})$ correpondant au cas des fibrés vectoriels, les groupes $\mathbb{S}\mathrm{to}_d(A^0)$ pour des demi-périodes consécutives sont alternativement le groupe des matrices triangulaires supérieures et inférieures avec des 1 sur la diagonale. Cela se généralise maintenant de la façon suivante [3] : les $\mathbb{S}\mathrm{to}_d(A^0)$ pour des demi-périodes consécutives sont les radicaux unipotents de sous-groupes de Borel opposés de G.

Théorème 3.2.7. *Soit A^0 un type formel fixé. Notons $U_+ = \mathbb{S}to_{\mathbf{d}}(A^0)$ où $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_l)$, et $U_- = \mathbb{S}to_{\mathbf{d}}(A^0)$ où $\mathbf{d}' = (d_{l+1}, \ldots, d_{2l})$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A^0) &\to (U_+ \times U_-)^{k-1} \\ A &\mapsto (C_1, \ldots C_{2(k-1)}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme entre l'espace $\mathcal{H}(A^0)$ des classes d'équivalence de connexions A de type formel A^0 et $(U_+ \times U_-)^{k-1}$.

4 Formulation en termes de systèmes locaux

On a vu plus haut qu'on a une équivalence entre fibrés vectoriels munis d'une connexion plate et systèmes locaux. L'intérêt de cette correspondance est qu'elle permet d'associer à une connexion un objet topologique plus intrinsèque. Cette philosophie a été généralisée aux connexions méromorphes par Deligne et Malgrange [16]. Nous allons décrire dans cette partie le système local associé dans cette approche à une connexion méromorphe.

4.1 Systèmes locaux gradués

On note ∂ un cercle, qui va correspondre pour nous à l'ensemble des directions autour de l'origine. On considère un revêtement $\pi/I \to \partial$, i.e. un système local d'ensembles. Pour tout $p \in \partial$, on note $I_p = \pi^{-1}(p)$ la fibre au-dessus de p. Lorsque p fait un tour autour du cercle, cela définit un automorphisme de mondromie $\sigma : I_p \to I_p$.

Définition 4.1.1. Un système local I-gradué est un système local $V \to \partial$ d'espaces vectoriels complexes, muni d'une graduation de la fibre V_p en chaque point $p \in \partial$

$$V_p = \bigoplus_{i \in I_p} V_p(i), \tag{4.1}$$

de telle sorte que chaque sous-espace vectoriel $V_p(i)$ soit localement constant sur ∂, par rapport à la structure de système local de V.

Si on fixe un point de base $p \in \partial$, la structure de système local de V définit un automorphisme de monodromie $\hat{\sigma} \in GL(V_p)$. Comme la graduation (4.1) est localement constante, on a

$$\hat{\sigma}(V_p(i)) = V_p(\sigma(i))$$

pour tout $i \in I_p$. En fait on voit aisément que la donnée d'un système local I-gradué V est équivalente à la donnée d'un automorphisme $\hat{\sigma} \in GL(V_p)$ vérifiant cette propriété.

On appelle *classe* d'un système local I-gradué V l'application $\Theta : I \to \mathbb{N}$ localement constante définie par

$$\Theta(i) = \dim(V_p(i)) \geq 0,$$

pour $i \in I_p$.

4.1.1 Le système local $\mathcal{I}$

On va associer aux connexions méromorphes des systèmes locaux gradués par un système local particulier $\mathcal{I}$.

Définition 4.1.2. On considère le cercle ∂ comme le cercle des directions autour de $z = 0$. Le système local $\mathcal{I} \to \partial$ est le système local dont les sections locales sur ∂ sont des fonctions de la forme

$$q = \sum_{i=1}^{k} a_i z^{-i/r},$$

avec $a_i \in \mathbb{C}$ et $k, r \in \mathbb{N}$. Le prolongement analytique de q correspond à un revêtement d'ordre r du cercle qui constitue une composante connexe de $\mathcal{I}$ notée $\langle q \rangle$. Plus précisément, un point $p \in \langle q \rangle$ détermine une fonction $q(z)$ dans un secteur autour de $d = \pi(p) \in \partial$, et les autres points de $\langle q \rangle$ au-dessus de d correspondent aux $r - 1$ autres branches de la fonction $\sum_{i=1}^{k} a_i z^{-i/r}$.

La raison qui nous fait introduire ce système local est que les fonctions de la forme $q = \sum_{i=1}^{k} a_i z^{-i/r}$ sont précisément celles qui apparaissent dans les facteurs exponentiels des solutions fondamentales des connexions méromorphes. On peut munir chaque fibre $\mathcal{I}_d$ d'un ordre partiel donné par la dominance des facteurs exponentiels : on dit que $q_1 <_d q_2$ si $e^{q_1}/e^{q_2} \sim 0$ dans un secteur constituant un voisinage de d.

On peut redéfinir les directions de Stokes dans cette perspective. Soit $I \subset \mathcal{I}$ un *recouvrement fini*, i.e. une union disjointe d'un nombre fini de composantes connexes de $\mathcal{I}$. Un tel I détermine un ensemble fini $\mathbb{S} \subset \partial$ de directions de Stokes définies de la façon suivante : ce sont les directions au voisinage desquelles I n'est pas totalement ordonné, i.e. les directions de part et d'autre desquelles l'ordre de dominance des facteurs exponentiels change.

4.2 Système local $\mathcal{I}$-filtré associé à une connexion méromorphe

Revenons au problème de la classification des connexions. On se place dans le cas des connexions sur des fibrés vectoriels. La forme des solutions fondamentales formelles entraîne que toute connexion méromorphe formelle s'écrit comme une somme directe, indexée par les facteurs exponentiels $\exp(q)$. Deligne et Malgrange ont montré [16] que ceci peut se formuler de la façon suivante.

Théorème 4.2.1. *La catégorie des connexions méromorphes formelles sur des fibrés vectoriels sur le disque épointé Δ^* est équivalente à la catégorie des systèmes locaux $\mathcal{I}$-gradués d'espaces vectoriels complexes.*

Si $V \to \partial$ est un système local $\mathcal{I}$-gradué, dans la décomposition $V_d = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}_d} V_d(i)$ le sous-espace $V_d(i)$ va être nul pour presque tout $i \in \mathcal{I}_d$. Les exposants pour lesquels $V_d(i)$ est non nul sont appelés les *exposants actifs* de V, ils définissent un recouvrement fini $I \subset \mathcal{I}$. V est donc I-gradué. Par ailleurs, si $i \in I_d$, la dimension de $V_d(i)$ ne dépend que de la composante connexe $\langle q \rangle$ de I à laquelle appartient i. On a ainsi une application

$$\begin{aligned} \Theta : \pi_0(\mathcal{I}) &\to \mathbb{N} \\ \langle q \rangle &\mapsto \dim(V_d(i)),\ i \in \langle q \rangle. \end{aligned}$$

D'où la définition suivante qui formalise dans cette perspective le type formel d'une connexion.

Définition 4.2.2. On appelle classe irrégulière une application $\Theta : \pi_0(\mathcal{I}) \to \mathbb{N}$ telle que toutes les composantes connexes de $\mathcal{I}$ sauf un nombre fini soient envoyées sur 0.

Pour la classification analytique, les systèmes locaux gradués ne vont pas suffire, nous allons avoir besoin de parler de *systèmes locaux filtrés*. Fixons une classe irrégulière Θ : on les exposants actifs $I \subset \mathcal{I}$ et les directions de Stokes $\mathbb{S} \subset \partial$ associées. On appelle *secteur de Stokes* un intervalle $U \subset \partial$ bordé par deux directions de Stokes consécutives. Par conséquent, pour un tel U, l'ordre de dominance des facteurs exponentiels définit un ordre total sur $I_U := \pi^{-1}(U) \subset I$.

Soit donc U un secteur de Stokes, on note V_U la restriction de V à U. Une filtration de V_U par I_U est la donnée pour tout $d \in U$ et $i \in I_d$ d'un sous-espace $F_i(d) \subset V_d$, telle que si $i, j \in I_d$ et $i <_d j$ alors $F_d(i) \subset F_d(j)$, et de plus ces sous-espaces sont localement constants lorsque d bouge dans U. A une telle filtration est associé un système local gradué défini par $\mathrm{Gr}F_d(i) = F_d(i)/\sum_{j <_d i} F_d(j)$. Une telle filtration sera dite compatible avec la classe Θ si les dimensions des $\mathrm{Gr}F_d(i)$ correspondent aux dimensions définies par Θ.

On appelle *système local I-filtré* un système local $V \to \partial$ muni d'une telle filtration sur chaque secteur de Stokes. On dira en plus que V est un *système local filtré de Stokes* si pour toute direction de Stokes $d \in \mathbb{S} \subset \partial$ il existe un voisinage $W \subset \partial$ de d et un système local $V_W \to W$ I_W-gradué tel que les filtrations de part et d'autre de d proviennent de cette graduation.

Bien sûr, nous introduisons toutes ces structures parce qu'elles peuvent naturellement associée à une connexion de la façon suivante. Soit (E, ∇) un fibré vectoriel muni d'une connexion méromorphe. Soit $V \to \Delta^*$ le système local des solutions de ∇, il induit un système local sur le cercle ∂ des directions, que l'on note encore V : pour $d \in \partial$ la fibre V_d est l'espace des sections horizontales de ∇ dans un secteur angulaire au voisinage de d.

Pour $d \in \partial$ et $q \in \mathcal{I}_d$ on définit un sous-espace $F_d(q) \subset V_d$ par

$$F_d(q) = \{v \in V_d,\ v/e^q \text{ est à croissance modérée en } z = 0 \text{ dans un secteur ouvert contenant } d\}$$

La forme des solutions fondamentales formelles et le théorème principale d'existence asymptotique entraînent alors immédiatement que l'on obtient ainsi une filtration de Stokes.

En fait, une nouvelle fois cette correspondance est plus forte :

Théorème 4.2.3 (Deligne-Malgrange)**.** *La catégorie des fibrés vectoriels sur le disque munis d'une connexion méromorphe et la catégorie des systèmes locaux filtrés de Stokes sont équivalentes.*

4.3 Système local de Stokes

La théorie des matrices de Stokes peut elle aussi se reformuler de façon plus intrinsèque en termes de systèmes locaux. On va ainsi associer à une connexion méromorphe un système local construit de la façon suivante.

Conservons les notations de la partie précédente. Notons $\Sigma = (\Delta, 0, A^0)$ le triplet constitué du disque unité Δ avec le point $z = 0$ marqué, et du type irrégulier A^0 en 0. On note $\hat{\Sigma} \to \mathbb{C}$ l'éclatement réel orienté en 0, de telle sorte que $\partial = \pi^{-1}(0)$ soit le cercle des directions autour de 0. Soit $\mathbb{H} \subset \hat{\Sigma}$ voisinage tubulaire du cercle ∂, notons $\partial' \subset \hat{\Sigma}$ sa frontière extérieure. On considère deux systèmes locaux de part et d'autre du cercle ∂', que l'on va recoller le long de ∂'. Sur $\mathbb{H}$ on considère le système local $\mathbb{L}_\infty$ des solutions de la forme normale A^0, qui est gradué par les $q(x)$ apparaissant dans le terme exponentiel e^Q ; sur $\Delta \setminus \mathbb{H}$ on considère le système local $\mathcal{L}$ des sections horizontales d'une connexion ∇ de type irrégulier A^0.

Ce que nous dit la théorie des matrices de Stokes est qu'il existe des isomorphismes privilégiés entre $\mathcal{L}$ et $\mathbb{L}_\infty$ sur le long des arcs de ∂' situés entre deux directions anti-Stokes. On peut donc recoller les deux systèmes locaux le long de ces arcs grâce à ces isomorphismes.

Pour formuler ceci, on note $\tilde{\Sigma}$ la surface obtenue en enlevant un point $e(d) \in \partial'$ dans chaque direction anti-Stokes d. Alors sur chaque composante connexe $U \subset \partial' \setminus \{e(d),\ d \in \mathbb{A}\}$ on a un isomorphisme privilégié entre $\mathcal{L}$ et $\mathbb{L}_\infty$. On recolle ainsi $\mathcal{L}$ et $\mathbb{L}$ pour former un système local $\mathbb{L}$.

Si $d \in \mathbb{A}$ est une direction anti-Stokes, considérons un lacet γ_d autour de $e(d)$ dans $\tilde{\Sigma}$, basé en $d \in \partial$. Alors la monodromie de $\mathbb{L}$ autour de γ_d est une puissance du facteur de Stokes K_d, elle appartient donc au groupe $\mathbb{S}\mathrm{to}(d)$. Tout ceci motive la définition suivante :

Définition 4.3.1. Un *système local de Stokes* pour Σ est un système local $\mathbb{L}$ sur $\tilde{\Sigma}$ tel que

(i) la restriction de $\mathbb{L}$ à $\mathbb{H}$ soit graduée par $q_1, \ldots, q_r$,

(ii) la monodromie de $\mathbb{L}$ autour de γ_d soit dans $\mathbb{S}\mathrm{to}(d)$ pour toute direction anti-Stokes d.

Cette définition caractérise les systèmes locaux qui proviennent d'une connexion irrégulière par cette construction.

5 Un exemple où apparaît la projection de Coxeter

On a vu que les directions singulières d'une connexion méromorphe sur un G-fibré principal sont déterminées, avec les notations précédentes par les points $\alpha(A_0)$. Ces points définissent une projection des racines de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G sur le plan complexe. Par ailleurs, certaines projections particulières du système de racines d'une algèbre de Lie sur un plan ont été largement étudiées dans la littérature, notamment la projection de Coxeter, qui est la projection "la plus symétrique" du système de racines. Le fameux dessin de la projection de Coxeter pour E_8 apparaît notamment au frontispice du livre de Coxeter [8].

Il est alors possible de se demander s'il existe des connexions pour lesquelles le diagramme des directions singulières coïncide avec la projection de Coxeter des racines. Nous allons présenter la projection de Coxeter, avant de décrire une famille de connexions qui satisfont effectivement cette propriété.

5.1 Éléments cycliques et plan de Coxeter

Soit G un groupe de Lie simple complexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Notons l le rang de $\mathfrak{g}$, et $(\cdot,\cdot)$ la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On note Δ l'ensemble des racines associées à $\mathfrak{h}$. On a la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\phi\in\Delta} \mathfrak{g}_\phi,$$

où $\mathfrak{g}_\phi$ est l'espace propre de dimension 1 associé à la racine ϕ. Pour tout $\phi \in \Delta$, soit e_ϕ un vecteur engendrant $\mathfrak{g}_\phi$. On peut choisir les e_ϕ de telle sorte que

$$(e_\phi, e_{-\phi}) = 1$$

pour tout $\phi \in \Delta$. On fixe un choix $\Delta_+ \subset \Delta$ de racines positives, et on note $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ l'ensemble des racines simples associées.

Soit W le groupe de Weyl de $\mathfrak{h}$. Rappelons que W est le groupe engendré par les réflexions s_α par rapport aux hyperplans orthogonaux aux racines $\alpha \in \Delta$. On a une description alternative du groupe de Weyl : si $T \subset G$ est le tore maximal associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, on a $W = N(T)/T$, où $N(T)$ est le normalisateur de T. W est engendré par les réflexions $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_l}$ correspondant aux racines simples.

Définition 5.1.1. Un *élément de Coxeter* $\gamma \in W$ est un produit des l réflexions $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_l}$, dans un ordre quelconque.

On a la propriété importante suivante : tous les éléments de Coxeter sont conjugués. Le *nombre de Coxeter* h est l'ordre d'un élément de Coxeter. Soit $\psi \in \Delta$ la plus haute racine, notons $\psi = \sum_{i=1}^l n_i\alpha_i$. Il se trouve qu'on a la relation

$$h = 1 + \sum_{i=1}^{l} n_i. \tag{5.1}$$

Soit $x \in \mathfrak{g}$. On dit que x est *semi-simple* si ad_x est diagonalisable, où ad désigne l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ sur elle-même. Si x est semi-simple, on dit que x est *régulier* si son centralisateur $\mathfrak{g}^x$ est une sous-algèbre de Cartan.

Pour $i = 1, \dots, l$, soit $\epsilon_i \in \mathfrak{h}$ le dual de α_i, i.e. $\langle \alpha_i, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}$. Soit $w = \sum_{i=1}^l \epsilon_i$. On définit

$$c = e^{2i\pi w/h} \in T. \tag{5.2}$$

Dans la terminologie de Kostant [14] c est un *élément principal* de G. On note aussi $\omega = e^{2i\pi/h}$.

Considérons un élément $x \in \mathfrak{g}$ de forme suivante :

$$x = \beta_{-\psi} e_{-\psi} + \sum_{i=1}^{l} \beta_i e_{\alpha_i}, \tag{5.3}$$

où $\beta_{-\psi}, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{C}$. Un tel élément vérifie

$$c \cdot x = \omega x, \tag{5.4}$$

où on note $c \cdot x$ pour désigner $\mathrm{Ad}_c(x)$. En effet, $w(e_{\alpha_i}) = e_{\alpha_i}$ d'où $c \cdot e_{\alpha_i} = \omega e_{\alpha_i}$, et $w(e_{-\psi}) = -\left(\sum_{i=1}^{l} n_i\right) e_{-\psi} = -(h-1)e_{-\psi}$, d'où $c \cdot e_{-\psi} = \omega^{1-h} e_{-\psi} = \omega e_{-\psi}$.

Si $\beta_{-\psi}$ et tous les β_i sont non nuls, on dit que x est un élément *cyclique* (associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$). Kostant a montré [14] que les éléments cycliques possèdent des propriétés remarquables.

Théorème 5.1.2. *Soit $x = \beta_{-\psi} e_{-\psi} + \sum_{i=1}^{l} \beta_i e_{\alpha_i}$, avec $\beta = (\beta_{-\psi}, \beta_1, \ldots, \beta_l) \in \mathbb{C}^{l+1}$. Alors x est semi-simple et régulier si et seulement si il est cyclique, i.e. si et seulement si les coefficients $\beta_{-\psi}, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{C}$ sont non nuls.*

Par ailleurs, dans ce cas, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$ contenant x est stable par Ad_c. Si l'on note $\gamma := Ad_c|_{\mathfrak{t}}$, alors γ est un élément de Coxeter du groupe de Weyl associé à $\mathfrak{t}$ et x est l'unique élément à multiplication par un scalaire près de $\mathfrak{t}$ satisfaisant

$$\gamma(x) = \omega x. \tag{5.5}$$

On suppose $l > 1$, de telle sorte que $h > 2$. Notons $\Delta' \subset \mathfrak{t}^*$ l'ensemble des racines associées à $\mathfrak{t}$. Alors l'espace vectoriel réel

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathfrak{t},\ \forall \phi \in \Delta',\ \phi(x) \in \mathbb{R}\}$$

satisfait

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}.$$

$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{t}$, invariante sous le groupe de Weyl W' correspondant à $\mathfrak{t}$. On peut montrer que la forme de Killing est définie positive sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$.On définit une opération de conjugaison de la façon naturelle. Le conjugué $\bar{x}$ de x est alors un vecteur propre de γ associé à la valeur propre conjuguée $\bar{\omega}$.

Le plan de Coxeter associé à l'élément cyclique x est défini par

$$P = \mathbb{R}\,\mathrm{Re}\,x + \mathbb{R}\,\mathrm{Im}\,x \ \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}, \tag{5.6}$$

c'est l'espace vectoriel réel engendré par les parties réelles et imaginaires de x. Il se trouve aussi que $t_{\mathbb{R}}$ est stable par γ. Alors la relation (5.5) entraîne, en identifiant parties réelles et imaginaires, que P est stable par γ, que γ est donné par une matrice de rotation d'angle $2\pi/h$ dans la base $(\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x))$. On en déduit que l'élément de Coxeter γ agit ainsi comme une rotation d'angle $2\pi/h$ sur P, et que les vecteurs $\mathrm{Re}(x)$ et $\mathrm{Im}(x)$ sont orthogonaux et de même norme pour la restriction à P de la forme de Killing.

Notons $Q : \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \to P$ la projection orthogonale par rapport à la forme de Killing. On considère le dessin formé les projections orthogonales des racines sur P. Plus précisément, si $\nu \in \Delta'$, soit $w_\nu \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ associé à ν par l'isomorphisme $\mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ donné par la forme de Killing. Le dessin de Coxeter est constitué par les $Q(w_\nu) \in P$. Comme Δ' est invariant par le groupe de Weyl W', la figure obtenue est invariante par rotation d'angle $2\pi/h$. Par abus de langage, le terme "plan de Coxeter" est souvent utilisé pour désigner cette figure, nous parlerons plutôt de projection de Coxeter pour éviter les confusions.

5.2 Une connexion particulière

On considère à présent une connexion méromorphe $\nabla = d - A$ sur un G-fibré principal sur le disque unité, telle que A est de la forme

$$A = \left(\frac{A_0}{z^2} + \dots\right) dz, \qquad A_0 \in \mathfrak{g} \text{ cyclique .} \tag{5.7}$$

La connexion a un pôle en $z = 0$ d'ordre 2, et le coefficient dominant A_0 est un élément cyclique de $\mathfrak{g}$. Guest et Ho [11] ont récemment étudié une connexion de cette forme, et ont remarqué que le diagramme de ses directions singulières coïncide avec la projection de Coxeter. Une telle connexion apparaît aussi chez Frenkel et Gross [10] dans un contexte différent.

L'élément A_0 est cyclique donc semi-simple et régulier. Notons $\mathfrak{t}$ la sous-algèbre de Cartan (unique) contenant A_0, et Δ' l'ensemble des racines associées, en accord avec les notations du paragraphe précédent. D'après la théorie générale exposée en 3.2, les directions singulières de la connexion ∇ sont celles pour lesquelles

$$-\frac{\alpha(A_0)}{z} \in \mathbb{R}_{<0}, \text{ pour un certain } \alpha \in \Delta'.$$

Les directions singulières sont donc les directions définies par les points $\alpha(A_0) \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \Delta'$ du plan complexe, comme remarqué dans [3] p. 1133.

Reprenons les notations du paragraphe précédent pour $x = A_0$. Les parties réelles dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ sont compatibles :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha(A_0)) &= \alpha(\operatorname{Re} A_0) \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{Im}(\alpha(A_0)) &= \alpha(\operatorname{Im} A_0) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a vu que $\operatorname{Re} A_0, \operatorname{Im} A_0 \in P$ sont orthogonaux et de même norme : il existe donc un réel $\lambda > 0$ tel que $(\operatorname{Re} A_0/\lambda, \operatorname{Im} A_0/\lambda)$ soit une base orthonormée de P. On en déduit que l'isométrie

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to P \\ a + ib &\mapsto a(\operatorname{Re} A_0/\lambda) + b(\operatorname{Im} A_0/\lambda) \end{aligned}$$

envoie $\alpha(A_0)$ sur $\frac{1}{\lambda^2} Q(w_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta'$, en effet

$$\begin{aligned} Q(w_\alpha) &= (w_\alpha, \operatorname{Re} A_0/\lambda) \operatorname{Re} A_0/\lambda + (w_\alpha, \operatorname{Im} A_0/\lambda) \operatorname{Im} A_0/\lambda \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\alpha(\operatorname{Re} A_0) \operatorname{Re} A_0 + \alpha(\operatorname{Im} A_0) \operatorname{Im} A_0\right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points $\alpha(A_0)$, $\alpha \in \Delta'$ donnant les directions singulières de notre connexion est isométrique (à une homothétie près) à la figure de Coxeter donnée par les projections $Q(w_\alpha)$. En particulier il est invariant par rotation d'angle $2\pi/h$. Le nombre de directions singulières est donc multiple de h.

Remarque. Guest et Ho procèdent de manière légérement différente dans [11] pour justifier que le diagramme des directions singulières coïncide avec la figure de Coxeter : ils expriment le conjugué de A_0 par rapport à la partie réelle $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire des $e_{-\alpha_i}$ et e_ψ en utilisant un calcul fait dans [15], pour en déduire que la base $(\operatorname{Re} A_0, \operatorname{Im} A_0)$ de P est orthonormée à un facteur d'échelle près. Le raisonnement que nous avons présenté ici est plus direct.

5.3 Une description plus fine de la projection de Coxeter

On souhaiterait à présent mieux décrire le diagramme des directions singulières. On va exploiter pour cela l'approche reposant sur la théorie des groupes de réflexion, décrite dans [12], [5], ou encore [18], [6].

On note $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l \in \Delta'$ les racines simples, et on note s_i les réflexions associées.

Lemme 5.3.1. *On peut ordonner les racines simples α'_i de telle sorte qu'il existe un entier m, $1 \leq m \leq l$ tel que les réflexions $s_1, \ldots, s_r$ commutent deux à deux, ainsi que les réflexions $s_{m+1}, \ldots, s_l$.*

Avec un tel ordre des racines simples, la transformation de Coxeter $\gamma := s_1 \ldots s_l$ se factorise en

$$\gamma = xy, \tag{5.8}$$

avec $x = s_1 \ldots s_m$, $y = s_{m+1} \ldots s_l$. On a $x^2 = y^2 = 1$. Comme toutes les transformations de Coxeter sont conjuguées, on peut supposer sans perte de généralité que l'on est dans ce cas et que notre transformation de Coxeter γ s'écrit $\gamma = xy$. Le plan de Coxeter apparaît alors de la façon suivante.

Proposition 5.3.2. *Le sous-espace propre $V_\omega \subset \mathfrak{t}_\mathbb{R}$ de la transformation de Coxeter $\gamma = xy$ pour la valeur propre $\omega = e^{2i\pi/h}$ est de dimension 1, ainsi que le sous-espace propre $V_{\bar{\omega}}$ pour $\bar{\omega}$. Le plan $P = V_\omega \oplus V_{\bar{\omega}}$ est stable par x et y. γ agit sur P comme une rotation d'angle $2\pi/h$, et x et y agissent sur P comme des réflexions par rapport à deux droites L et M faisant un angle de π/h.*

Preuve. voir [6] p 8-9, qui donne une preuve due à Steinberg [18], dont des éléments sont déjà présents chez Coleman [7]. □

L'unicité du vecteur propre de γ pour la valeur propre $e^{2i\pi/h}$ assure que le plan P est bien le même que celui défini précédemment.

Considérons les images des droites L et M dans P sous l'action de γ. Si h est pair, on obtient deux orbites, constituées chacune $h/2$ droites, l'une contenant L, l'autre contenant M. Si h est impair, on obtient une seule orbite contenant h droites. Dans les deux cas, on a h droites en tout.

Lemme 5.3.3. *Notons $H_1, \ldots, H_l$ les hyperplans orthogonaux aux racines simples α'_i. Alors les hyperplans $H_{m+1}, \ldots, H_l$ coupent P en L, et les hyperplans $H_1, \ldots, H_m$ coupent P en L. De plus, aucune autre racine positive $\alpha \in \Delta'$ ne vérifie $H_\alpha \cap P = L$ ou M.*

Preuve. voir par exemple [12] p. 79. □

En faisant agir γ, on en déduit combien d'hyperplans H_α, avec $\alpha \in \Delta'$ positive, coupent P sur chacune des h droites. Si h est pair, $l - m$ hyperplans coupent P sur chacune des $h/2$ droites de l'orbite de L, et m hyperplans coupent P sur chacune des $h/2$ droites de l'orbite de M. Si h est impair, le nombre d'hyperplans coupant chacune des h droites est à la fois $l - m$ (car c'est l'orbite de L) et l (car c'est aussi l'orbite de M), d'où $m = l/2$. Dans les deux cas, on obtient que le nombre total de racines positives est $hl/2$. On a donc prouvé la relation suivante :

Proposition 5.3.4. *Le nombre de Coxeter h, le rang l et le nombre total de racines N de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ satisfont*

$$N = hl. \tag{5.9}$$

Revenons au diagramme des directions singulières. Les projections $Q(w_\alpha)$, $\alpha \in \Delta'$ des racines sur P sont orthogonales aux intersections $H_\alpha \cap P$, on déduit donc de ce qui précède qu'il y a $2h$ directions singulières (chaque ligne donnant deux directions singulières opposées) régulièrement espacées.

On peut également déterminer quelles racines supportent chaque direction singulière. Notons L' et M' les lignes respectivement orthogonales à L et M. On peut numéroter les directions singulières $d_1, \ldots d_{2h}$ de telle sorte que M' correspond aux directions d_1 et d_{h+1} et L' aux directions d_h et d_{2h}. On note comme précédemment $\mathcal{R}(d_i)$ l'ensemble des racines supportées par la direction d_i. Le lemme précédent entraîne que les projections de $\alpha'_{m+1}, \ldots, \alpha'_l$ sont sur L', et celles de $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ sont sur M', mais ne nous dit pas sur quelles directions se trouvent ces projections. Pour le voir, il faut exploiter que les α'_i sont

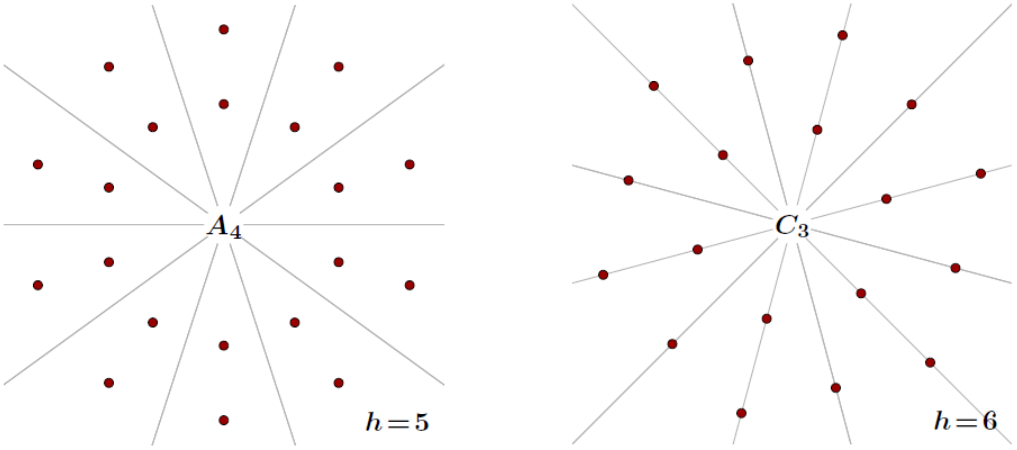


FIGURE 2 – Projection de Coxeter de A_4 et C_3. Les lignes représentent les intersections $H_\alpha \cap P$, les points sont les projections des racines (figure tirée de [6]).

des racines simples : les projections des racines positives sont des combinaisons linéaires positives des $Q(w_{\alpha'_i})$, et elles se trouvent toutes dans un demi-plan strict de P. Ainsi, on a nécessairement $\mathcal{R}(d_1) = \{\alpha'_{m+1}, \dots, \alpha'_l\} =: \Pi'_2$ et $\mathcal{R}(d_h) = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_m\} =: \Pi'_1$, ou bien $\mathcal{R}(d_{h+1}) = \Pi'_2$ et $\mathcal{R}(d_{2h}) = \Pi'_1$ (voir aussi [11] p.26). On peut supposer qu'on est dans les premier cas quitte à renuméroter les directions.

Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(d_1) &= \Pi'_2, \\ \mathcal{R}(d_{2h}) &= -\Pi'_1, \end{aligned}$$

et on en déduit $\mathcal{R}(d_i)$ pour tout $1 \leq i \leq 2h$ en faisant agir γ : on a en effet pour tout i

$$\mathcal{R}(d_{i+2}) = \gamma(\mathcal{R}(d_i)).$$

En particulier, pour toute direction singulière d_i, les racines dans $\mathcal{R}(d_i)$ sont deux à deux orthogonales.

On en déduit aussi les groupes de Stokes associés à chaque direction singulière

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_{d_i}(A) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}(d)} \exp(\mathfrak{g}_\alpha) \subset G.$$

Par exemple, $\mathbb{S}\mathrm{to}_{d_1}(A) = \exp\left(\mathfrak{g}_{\alpha'_{m+1}}\right) \dots \exp\left(\mathfrak{g}_{\alpha'_l}\right)$. Le produit de ces groupes de Stokes est isomorphe à l'ensemble des classes d'équivalence de connexions ayant le même type formel que A.

Tout ceci se visualise sur les exemples représentés sur la figure 2. Les lignes représentées sur cette figure sont les intersections des hyperplans H_α avec le plan de Coxeter : elles correspondent ainsi aux directions de Stokes de la connexion.

A Preuve du théorème principal d'existence asymptotique

On suit ici la preuve donnée par Wasow [20].

Une première transformation Conservons les notations de l'énoncé du théorème. On va commencer par montrer le théorème dans le cas où les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ de la matrice jacobienne

$$\left\{ \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in S}} \left(\left.\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right|_{z=0} \right) \right\}$$

sont deux à deux distinctes. On peut réécrire l'équation différentielle sous la forme

$$x^{-q} y' = a(x) + A(x)y + g(x,y), \tag{A.1}$$

avec $a(x) = f(x,0)$, $A(x) = \left(\left.\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right|_{z=0} \right)$, et $g(x,y)$ polynôme en y sans terme constant ni de degré 1. Par hypothèse $A(x)$ possède une série asymptotique $A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{-n}$ pour $x \to \infty$, $x \in S$, où A_0 a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Quitte à faire une transformation de jauge constante on peut supposer que $A_0 = \Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$.

Soit $\phi(x) : S \cap \{|x| \geq x_0\} \to \mathbb{C}^N$ une fonction holomorphe telle que $\phi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^{-n},\ x \to \infty,\ x \in S$. On fait le changement de variable

$$u = y - \phi(x).$$

Cela transforme l'équation différentielle en

$$x^{-q} u' = a(x) + A(x)\phi(x) - x^{-q}\phi'(x) + A(x)u + g(x, u + \phi(x)). \tag{A.2}$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n x^{-n}$ est une solution formelle de (A.1), il existe une fonction holomorphe $b(x)$ avec $b(x) \sim 0,\ x \to \infty,\ x \in S$ telle que

$$a(x) + A(x)\phi(x) - x^{-q}\phi'(x) = -g(x, \phi(x)) + b(x).$$

Ceci permet d'écrire (A.2) sous la forme

$$x^{-q} u' = b(x) + A(x)u + g(x, u + \phi(x)) - g(x, \phi(x)).$$

Notons maintenant $g(x, u+\phi(x)) - g(x, \phi(x)) = A^*(x)u + h(x,u)$ avec $A^*(x) = \left(\left.\frac{\partial g_j(x, u+\phi(x))}{\partial u_k}\right|_{u=0} \right)$. Comme $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ et que $\partial g_j(x,z)/\partial z_k|_{z=0} = 0$, on a $\lim_{x\to\infty} A^*(x) = 0$. La fonction $h(x,u)$ est polynomiale en les composantes de u sans terme constant ni de degré 1, ses coefficients admettent des séries asymptotiques en puissances de x^{-1}. Posons enfin $B(x) := A(x) + A^*(x)$. On s'est finalement ramené à l'équation différentielle

$$x^{-q} u' = b(x) + B(x)u + h(x,u), \tag{A.3}$$

avec $\lim_{x\to\infty} B(x) = \Lambda$ dans S. On veut montrer que cette équation admet une solution asymptotique à zéro pour $x \to \infty,\ x \in S$.

Méthode de résolution Comme $\lim_{x\to\infty} B(x) = \Lambda$, il va être judicieux d'écrire (A.3) sous la forme

$$x^{-q} u' = \Lambda u + p(x,u), \tag{A.4}$$

avec $p(x,u) = b(x) + (B(x) - \Lambda)u + h(x,u)$. L'intérêt est que $p(x,u)$ va être petit pour $x \in S$ grand et u petit. Si $u(x)$ est une solution de (A.4), on a par la méthode de variation de la constante la relation

$$u(x) = V(x)k + \int_a^x V(x)V^{-1}(t)t^q p(t, u(t))dt, \tag{A.5}$$

où $k \in \mathbb{C}^N$ constant, et où $V(x)$ est une solution fondamentale de l'équation homogène $x^{-q}V' = \Lambda V$. La relation (A.5) est une équation intégrale équivalente à (A.4). Dans la suite, on va avoir besoin de modifier légèrement le membre de droite de cette équation pour avoir des estimations sur les différents termes : celui-ci est donné par N intégrales scalaires, et on va choisir un chemin d'intégration $\gamma_j(x),\ j = 1, \dots, N$ différent pour chaque intégrale. La définition de ces chemins sera donnée plus loin.

L'équation homogène $x^{-q}V' = \Lambda V$ admet la solution fondamentale

$$V(x) = \exp\left(\frac{x^{q+1}}{q+1}\Lambda\right).$$

On choisit $k = 0$ dans (A.5), l'équation intégrale devient alors

$$u(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp\left(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1}\Lambda\right) t^q p(t, u(t))dt, \tag{A.6}$$

où on désigne par $\Gamma(x)$ notre choix de chemins. Cette équation est de la forme

$$u = \mathscr{P}u, \tag{A.7}$$

avec $\mathscr{P}$ opérateur non-linéaire. Le problème revient donc à trouver un point fixe de $\mathscr{P}$. De manière classique, on va trouver un point fixe par itérations : on pose

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \mathscr{P}u_n,\ n \geq 0. \tag{A.8}$$

Pour montrer que la suite converge, on va obtenir des estimations des différences $u_{n+1} - u_n$.

Les chemins d'intégration On va construire les chemins d'intégration $\gamma_j(x),\ j = 1, \dots, N$ de telle sorte que les exponentielles apparaissant dans (A.6) soient bornées. Il va être plus commode de décrire l'image des $\gamma_j(x)$ par le changement de variable $\tau = t^{q+1}$. Notons Σ l'image du secteur S par $t \mapsto \tau$, c'est un secteur d'angle inférieur à π. Quitte à réduire un peu S on peut supposer qu'aucune des directions le long desquelles $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) = 0$ n'est à la frontière de S. On peut alors diviser l'ensemble des valeurs propres λ_j en deux sous-ensembles : quitte à réordonner les λ_j, on peut supposer que $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) < 0$ pour $\tau \in \Sigma$ pour $1 \leq j \leq j_1$, et $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) \geq 0$ avec égalité au plus dans une direction pour $j_1 < j \leq N$.

Ensuite, on choisit ξ_1 un point sur la bissectrice de Σ avec $|\xi_1| > x_0^{q+1}$. On note $\Sigma^* \subset \Sigma$ le secteur fermé avec sommet en ξ_1 et dont les bords sont parallèles à ceux de Σ, de telle sorte que $|\tau| > x_0^{q+1}$ sur Σ^*, et on note S^* son antécédent par $t \mapsto \tau$. Pour $j \leq j_1$ on note $\delta_j(\xi)$ le segment entre ξ_1 et ξ. Pour $j > j_1$, on choisit une direction λ_j depuis l'origine dans Σ sur laquelle $\mathrm{Re}(\tau\lambda_j) > 0$, et on appelle $\delta_j(\xi)$ la demi-droite dans Σ^* allant de ∞ à ξ parallèle à l_j. Dans les deux cas, on définit le chemin d'intégration $\gamma_j(x)$ comme l'antécédent de $\delta_j(\xi)$ par $x \mapsto \xi = x^{q+1}$.

L'intérêt de cette construction un peu compliquée est qu'on a maintenant l'estimation suivante :

Lemme A.0.1. *Notons $\lambda_0 = \min_j |\lambda_j|$. Il existe $\mu > 0$ indépendante de λ_0, j et ξ_1 telle que*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(x^{q+1} - t^{q+1})\lambda_j}{q+1}\right) \leq -\frac{|x^{q+1} - t^{q+1}|\lambda_0\mu}{q+1} \tag{A.9}$$

pour $t \in \gamma_j(x)$ et $x \in S^*$.

Preuve. Par construction des chemins $\gamma_j(x)$, les $(\tau - \xi)\lambda_j$, où $\tau = t^{q+1}$ et $\xi = x^{q+1}$, sont dans un sous-secteur fermé de demi-plan complexe $\{\mathrm{Re}(z) \leq 0\}$. Donc il existe $\mu > 0$ tel que

$$\cos(\arg(\xi - \tau)\lambda_j) \leq -\mu.$$

Cela donne directement le résultat voulu. □

Une inégalité

Lemme A.0.2. *Soit $\chi(x) : S^* \to \mathbb{C}^N$ holomorphe, satisfaisant une inégalité de la forme $||\chi(x)|| \leq c|x|^{-m}$ où $m \leq 0$ est un entier et $c > 0$. Alors la fonction*

$$\psi(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp\left(\frac{(x^{q+1} - t^{q+1})\Lambda}{q+1}\right) t^q \chi(t) dt. \tag{A.10}$$

est holomorphe sur S^* et satisfait

$$||\psi(x)|| \leq Kc|x|^{-m}, \tag{A.11}$$

où $K > 0$ est indépendant de $\chi(t)$ (mais pas de m).

Preuve. Notons $\psi_j(x)$, $j = 1, \ldots, N$ les composantes de ψ. On a en utilisant le lemme précédent et en utilisant $||\psi(x)|| \leq Kc|x|^{-m}$

$$|\psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1} \int_{\delta_j(\xi)} \exp\left(-\frac{|\xi - \tau|\lambda_0\mu}{q+1}\right) |\tau|^{-m/(q+1)} ||d\tau|. \tag{A.12}$$

Commençons par le cas $j \leq j_1$, et posons $\rho = |\xi - \tau|$ et $\tau = \xi - \rho e^{i\alpha}$. L'inégalité précédente s'écrit alors

$$|\psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1} \int_0^{|\xi - \xi_1|} \exp\left(-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right) |\tau|^{-m/(q+1)} d\rho. \tag{A.13}$$

On coupe l'intégrale en deux. Pour $\rho \leq |\xi - \xi_1|/2$, on voit que $|\tau| \geq |\xi|/2$, donc la partie correspondante de l'intégrale est majorée par

$$\frac{c|\xi|^{-m/(q+1)} 2^{m/(q+1)}}{q+1} \int_0^{|\xi - \xi_1|} \exp\left(-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right) d\rho = \frac{c2^{m/(q+1)}}{\lambda_0\mu} |\xi|^{-m/(q+1)}.$$

Pour $\rho > |\xi - \xi_1|/2$, on remplace dans l'intégrale $|\tau|$ par $|\xi_1| \leq |\tau|$, et on trouve que l'intégrale est majorée par

$$\frac{c}{q+1} |\xi_1|^{-m/(q+1)} \int_{|\xi - \xi_1|/2}^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right) d\rho = \frac{c}{q+1} |\xi_1|^{-m/(q+1)} \exp\left(-\frac{|\xi - \xi_1|\lambda_0\mu}{2(q+1)}\right).$$

Cette expression est un $O(\xi^{-m/(q+1)})$ pour $\xi \to \infty$ dans Σ.

Traitons maintenant le cas $j > j_1$. Dans ce cas il existe $p > 0$ assez petit tel que

$$|\tau| \geq p|\xi|, \text{ pour } \tau \in \delta_j(\xi).$$

Ceci se voit géométriquement sans peine au vu de la forme du chemin $\delta_j(\xi)$. L'équation (A.12) donne alors, en posant $\rho = |\xi - \tau|$

$$|\psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1} p^{-m/(q+1)} |\xi|^{m/(q+1)} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho\lambda_0\mu}{q+1}\right) d\rho = \frac{c}{\lambda_0\mu} p^{-m/(q+1)} |\xi|^{m/(q+1)},$$

d'où l'inégalité souhaitée. □

Construction de la solution Soit S' un sous-secteur fermé de S, on peut répéter la construction précédente pour définir $S^{*\prime}$, et en prenant S' suffisamment proche de S on peut faire en sorte que les chemins $\Gamma(x)$ soient dans $S^{*\prime}$ quand $x \in S^{*\prime}$. Soit $m \geq 0$ un entier. Comme $b(x) \sim 0$ pour $z \to \infty$, $z \in S$, il existe $c > 0$ (dépendant de m) tel que

$$||b(x)|| \leq c|x|^{-m}, \qquad x \in S^{*\prime}.$$

Le lemme précédent entraîne alors que $u_1 = \mathscr{P}u$ satisfait l'inégalité

$$||u_1(x)|| \leq Kc|x|^{-m}, \qquad x \in S^{*\prime}.$$

On veut maintenant majorer $u_{n+1} - u_n = \mathscr{P}u_n - \mathscr{P}u_{n-1}$ par récurrence. Pour cela il va nous falloir majorer $p(t, u_n(t) - u_{n-1}(t))$, on a donc besoin de contrôler

$$||(B(x) - \Lambda)(z^{(2)} - z^{(1)}) + h(x, z^{(2)}) - h(x, z^{(1)})||$$

pour des vecteurs $z^{(1)}$, $z^{(2)}$. Comme $B(x) \to_{x\to\infty} \Lambda$ et comme $h(x, z)$ est un polynôme en z sans termes de degré 0 ni 1, on a pour $x \in S^{*\prime}$ et $||z^{(i)}|| \leq z_0$

$$||(B(x) - \Lambda)(z^{(2)} - z^{(1)}) + h(x, z^{(2)}) - h(x, z^{(1)})|| \leq \gamma||(z^{(2)} - z^{(1)})||, \tag{A.14}$$

où la constante γ peut être prise arbitrairement petite si l'on choisit $|\xi^1|$ assez grand et z_0 assez petit. On peut donc supposer $\gamma < 1/K$. Quitte à augmenter x_0 on peut aussi supposer que

$$\frac{cK}{1 - \gamma K}|x|^{-m} \leq z_0, \quad x \in S^{*\prime}. \tag{A.15}$$

Tous les ingrédients sont maintenant en place pour montrer par récurrence sur n et $x \in S^{*\prime}$ les inégalités

$$||u_{n+1} - u_n|| \leq \gamma^n K^{n+1} c|x|^{-m}, \tag{A.16}$$

$$||u_{n+1}|| \leq \frac{cK}{1 - \gamma K}|x|^{-m}. \tag{A.17}$$

En effet, les inégalités sont vraies pour $n = 0$ car $u_0 = 0$. Si elles sont vraies pour tout $k \leq n - 1$, alors, on a par (A.15) $|u_n|, |u_{n-1}| \leq z_0$. On peut donc appliquer (A.14) à $z^{(1)} = u_{n-1}$, $z^{(2)} = u_n$, ce qui donne

$$||p(x, u_n - u_{n-1})|| \leq \gamma||u_n - u_{n-1}|| \leq \gamma^n K^n c|x|^{-m}.$$

Le lemme précédent appliqué à $\chi(x) = p(x, u_n - u_{n-1})$ donne alors l'égalité (A.16) au rang n. L'inégalité (A.17) au rang n s'en déduit alors : on a

$$||u_{n+1}|| \leq \sum_{k=0}^{n} ||u_{k+1} - u_k|| \leq cK|x|^{-m} \sum_{k=0}^{n} \gamma^k K^k < \frac{cK}{1 - \gamma K}|x|^{-m}.$$

On en déduit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} ||u_{n+1} - u_n||$ converge, ainsi la série $\sum_{k=0}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$ converge uniformément sur $S^{*\prime}$ vers une fonction u, qui satisfait $u = \mathscr{P}u$. Cela conclut la preuve du théorème lorsque les valeurs propres de A_0 sont distinctes.

Lorsque les valeurs propres de A_0 ne sont pas distinctes, la preuve est presque identique. Au lieu de diagonaliser A_0, on la met sous forme de Jordan, on a maintenant

$$\Lambda = D + H$$

avec D diagonale et $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s$ somme de blocs de Jordan nilpotents. Dans la preuve du lemme A.0.2 il faut alors majorer un terme supplémentaire où intervient H, le reste de la preuve est le même (voir [20] p. 99).

Références

[1] Werner Balser, Wolfgang B Jurkat, and Donald A Lutz. Birkhoff invariants and Stokes' multipliers for meromorphic linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 71(1) :48–94, 1979.

[2] George D Birkhoff. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. In *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, volume 49, pages 521–568, 1913.

[3] Philip P Boalch. G-bundles, isomonodromy, and quantum Weyl groups. *International Mathematics Research Notices*, 2002(22) :1129–1166, 2002.

[4] Philip P Boalch. Wild character varieties, points on the Riemann sphere and Calabi's examples. In *Representation Theory, Special Functions and Painlevé Equations — RIMS 2015*, volume 76 of *Advanced Studies in Pure Mathmatics*, pages 67–94, 2018.

[5] N Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV-VI.* Hermann, 1968.

[6] Bill Casselman. Essays on coxeter groups.

[7] AJ Coleman. The Betti numbers of the simple lie groups. *Canad. J. Math*, 10 :349–356, 1958.

[8] H Coxeter. Regular complex polytopes, cambridge u. *Press, London*, 1974.

[9] Pierre Deligne. Equations différentielles à points singuliers réguliers. *Lecture Notes in Math*, 163, 1970.

[10] Edward Frenkel and Benedict Gross. A rigid irregular connection on the projective line. *Annals of mathematics*, pages 1469–1512, 2009.

[11] Martin Guest and Nan-Kuo Ho. Kostant, Steinberg, and the Stokes matrices of the tt*-Toda equations. *arXiv preprint arXiv :1802.01126*, 2018.

[12] James E Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29. Cambridge university press, 1992.

[13] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. Interscience publishers New York, 1963.

[14] Bertram Kostant. The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple lie group. *American Journal of Mathematics*, 81(4) :973–1032, 1959.

[15] Bertram Kostant. Experimental evidence for the occurrence of E8 in nature and the radii of the Gosset circles. *Selecta Mathematica*, 16(3) :419–438, 2010.

[16] B Malgrange. La classification des connexions irrégulières à une variable. *Cours de l'institut Fourier*, 17 :1–19, 1982.

[17] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Elementary acceleration and multisummability. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor*, 54(4) :331–401, 1991.

[18] Robert Steinberg. Finite reflection groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 91(3) :493–504, 1959.

[19] George Gabriel Stokes. On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9 :166, 1851.

[20] Wolfgang Wasow. Asymptotic expansions for ordinary differential equations, interscience, new york, 1965. page 144, 1970.