

# 1 Percolation dans un graphe

## 1.1 Définitions

La percolation désigne un phénomène critique dans la transmission d'une information au travers un milieu régulier aléatoire : un faible changement des paramètres différencie une transmission limitée à quelques voisins d'une transmission à des voisins arbitrairement loin.

**Notations :** nous représenterons un tel milieu par un graphe simple, non-orienté, et connexe noté  $G = (S, E)$  avec  $S$  et  $E$  les ensembles dénombrables de sommets et d'arêtes.

On introduit de plus la famille de graphes à coordonnées entières en dimension  $d \in \mathbb{N}^*$  notée  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  où  $\mathbb{E}^d = \{(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2 / \|x - y\|_1 = 1\}$  (figure 1).

**Modèle de la percolation de Bernoulli par liens :** fixons  $p \in [0, 1]$  un paramètre.

L'ensemble des arêtes  $E$  étant dénombrable, il existe d'après le théorème de Kolmogorov un espace probabilisé  $(\Omega_p, \mathcal{T}_p, \mathbb{P}_p)$  et une suite  $(X_e)_{e \in E}$  des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  sur cet espace.

Définissons alors pour  $\omega \in \Omega_p$  un nouveau graphe  $G(\omega) = (S, E_\omega)$  où  $E_\omega = \{e \in E / X_e(\omega) = 1\}$  (figure 2). Ce graphe est appelé graphe ouvert, ses arêtes sont les arêtes ouvertes (et les autres arêtes de  $E$  sont déclarées fermées).

Pour  $(x, y) \in S^2$  nous noterons  $x \leftrightarrow y$  l'événement " $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin ouvert", et nous noterons  $C(x)$  la composante connexe ouverte de  $x$ , c'est-à-dire l'ensemble des points reliés à  $x$  dans  $G(\omega)$ . La percolation est alors l'événement "l'une des  $C(x)$  est infinie". Nous noterons donc  $x \leftrightarrow \infty$  l'événement qu'il y ait percolation en  $x$  : " $\text{Card}(C(x)) = +\infty$ ".

**Objectif de l'étude :** nous nous intéresserons principalement au comportement des deux fonctions suivantes :

- la probabilité qu'il y ait percolation,  $\psi : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ p & \mapsto \mathbb{P}_p \left( \bigcup_{x \in S} \{x \leftrightarrow \infty\} \right) \end{cases}$
- la probabilité qu'il y ait percolation en  $x \in S$ ,  $\theta_x : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ p & \mapsto \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) \end{cases}$

Remarque : la fonction  $\theta$  est indépendante de  $x$  dans les graphes invariant par translation tels  $\mathbb{L}^d$ , mais pas dans le cas général.

## 1.2 Préliminaires probabilistes

**Tribu asymptotique :** on appelle tribu asymptotique l'ensemble des événements  $A$  indépendants de l'état de tout nombre fini  $n$  d'arêtes  $\{e_1, \dots, e_n\}$  :

$$\forall \varepsilon \in \{0, 1\}^n, \mathbb{P}_p \left( A \cap \bigcap_{i=1}^n \{X_{e_i} = \varepsilon_i\} \right) = \mathbb{P}_p(A) \times \mathbb{P}_p \left( \bigcap_{i=1}^n \{X_{e_i} = \varepsilon_i\} \right)$$

**Proposition 1 : (Loi du 0-1 de Kolmogorov)**

Soit  $A$  un événement de la tribu asymptotique, on a  $\mathbb{P}_p(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}_p(A) = 1$ .

Nous avons admis ce résultat.

**Événements croissants :** munissons  $\Omega_p$  de la relation d'ordre suivante,

$$\omega \preceq \omega' \Leftrightarrow \forall e \in E, X_e(\omega) \leq X_e(\omega')$$

Un événement  $A$  est dit croissant si pour  $\omega \in A$  et  $\omega' \in \Omega$ , on a l'implication  $\omega \preceq \omega' \Rightarrow \omega' \in A$ .

Une variable aléatoire réelle  $X$  est dite croissante si pour tout  $(\omega, \omega') \in \Omega_p^2$  vérifiant  $\omega \preceq \omega'$ , on a  $X(\omega) \leq X(\omega')$ .

**Proposition 2 : (Inégalité FKG)**

Pour  $A, B$  deux événements croissants, on a  $\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B)$ .

Pour  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles croissantes, on a  $\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y)$ .

**Démonstration :** la formulation en termes de variables aléatoires implique celle en termes d'événements par le biais des fonction indicatrices.

Nous avons fait par récurrence la démonstration dans le cas où les variables aléatoires ne dépendent que de l'état d'un nombre fini d'arêtes à l'aide d'espérances conditionnelles. Nous avons toutefois admis le théorème de convergence dans  $L^2$  permettant de passer à la limite.  $\square$

### 1.3 Résultats généraux

**Proposition 3 : (Existence d'une probabilité critique)**

Définissons la probabilité critique  $p_c$  par

$$p_c = \sup \{p \in [0, 1] / \theta_x(p) = 0\} \text{ pour } x \in S$$

Cette valeur ne dépend que du graphe  $G = (S, E)$ .

**Démonstration :** soit  $x$  et  $y$  deux sommets du graphe,

$$\begin{aligned} \theta_x(p) &= \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) \geq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\} \cap \{y \leftrightarrow \infty\}) \\ &\text{or } \{x \leftrightarrow y\} \text{ et } \{y \leftrightarrow \infty\} \text{ sont croissants donc d'après FKG,} \\ &\geq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\})\mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow \infty\}) \\ &= \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow y\})\theta_y(p) \end{aligned}$$

D'où l'implication  $\theta_y(p) \neq 0 \Rightarrow \theta_x(p) \neq 0$ . Par symétrie,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  s'annulent simultanément.  $\square$

**Proposition 4 : (Croissance par rapport à  $p$ )**

Soit  $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$

Soit  $N$  une variable aléatoire croissante sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $A$  un événement croissant.

1.  $\mathbb{E}_{p_1}(N) \leq \mathbb{E}_{p_2}(N)$  (sous réserve d'existence)
2.  $\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A)$

Ce résultat implique notamment la croissance de  $\theta_x$  par croissance de l'évènement  $x \leftrightarrow \infty$ .

**Démonstration :** le modèle de percolation de Bernoulli ne suffit pas à démontrer ce théorème (car l'univers dépend de  $p$ ). Il peut être montré en admettant l'existence d'une suite de variable aléatoire  $(X_e)_{e \in E}$  suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .  $\square$

**Proposition 5 : (Transition de phase)**

La fonction  $\psi$  vérifie  $\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ 1 & \text{si } p > p_c \end{cases}$

**Démonstration :** l'évènement  $\bigcup_{x \in S} \{x \leftrightarrow \infty\}$  est indépendant de l'état d'un nombre fini d'arêtes donc  $\psi$  est à valeur dans  $\{0, 1\}$  d'après la loi du 0-1 de Kolmogorov.

- Pour  $p > p_c$ ,  $\psi(p) \geq \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty) = \theta_x(p) > 0$  par croissance de  $\theta_x$ .
- Pour  $p < p_c$ ,  $\psi(p) \leq \sum_{x \in S} \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty) = 0$  d'après l'inégalité de Boole. □

**Proposition 6 : (Inégalités fondamentales sur la probabilité critique)**

Dans tout graphe de degré borné, on a  $p_c > 0$ .

Dans tout graphe  $\mathbb{L}^d$  pour  $d \geq 2$  on a  $p_c < 1$ .

**Démonstration :** dans un graphe de degré borné par  $M$ , il y a au plus  $M^n$  chemins de longueur  $n$  partant d'un point  $x$ . Donc la probabilité qu'il existe un chemin ouvert de longueur  $n$  partant de  $x$  est majoré par  $M^n p^n$  ce qui tend vers 0 pour  $p < \frac{1}{M}$ , d'où la première inégalité.

$\mathbb{L}^d$  est inclus dans  $\mathbb{L}^{d+1}$  donc s'il y a percolation dans  $\mathbb{L}^d$  il y a a fortiori percolation dans  $\mathbb{L}^{d+1}$ . Il suffit donc de montrer le résultat dans le cas  $d = 2$ , c'est alors une conséquence immédiate du théorème de Kesten (proposition 9), mais il existe une démonstration plus simple avec des arguments de dualité. □

## 2 Cas du graphe $\mathbb{L}^2$

### 2.1 Dualité planaire

**Grappe dual :** il s'agit du graphe  $\mathbb{L}^2$  translaté de  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (figure 3). Une arête du dual est déclarée ouverte si elle croise une arête fermée du graphe principal, et fermée sinon. Cela donne une percolation de Bernoulli de paramètre  $1 - p$  dans le dual car les arêtes ouvertes du dual sont en bijection avec les arêtes fermées du graphe principal (figure 4).

### 2.2 Régimes sous-critique et sur-critique

Les deux résultats suivants sont valables pour tout graphe  $\mathbb{L}^d$  avec  $d \geq 2$ .

**Proposition 7 : (Décroissance exponentielle en régime sous-critique)**

Pour  $p < p_c$ , il existe  $(c_1, c_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tels que pour tout sommet  $x \in \mathbb{Z}^d$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}_p(|C(x)| \geq n) \leq c_1 e^{-c_2 n}$$

Nous avons admis ce résultat.

**Proposition 8 : (Unicité presque sûre de la composante infinie en régime sur-critique)**

Pour  $p > p_c$ , la composante connexe ouverte infinie est presque sûrement unique.

**Démonstration :** nous n'avons fait qu'une partie de la démonstration dans le cas  $d = 2$ . En admettant que la loi du 0-1 de Hewitt-Savage permet de montrer que le nombre de composantes connexes ouvertes infinies est presque sûrement constant, on montre qu'il ne peut être ni fini plus grand que deux en considérant le nombre d'amas intersectant la boîte  $(-n, -n) \dots (n, n)$ , ni infini par un argument asymptotique. □

### 2.3 Valeur de la probabilité critique

**Proposition 9 : (H. Kesten, 1980)**

La valeur de la probabilité critique de la percolation de Bernoulli par liens dans  $\mathbb{L}^2$  est  $\frac{1}{2}$

**Démonstration :** la démonstration se fait par double inégalité. Montrons que  $p = \frac{1}{2}$  ne correspond ni au régime sous-critique, ni au régime sur-critique en contredisant la décroissance exponentielle et l'unicité presque sûre (propositions 7 et 8).

$p_c \leq \frac{1}{2}$  : supposons être en régime sous-critique à  $p = \frac{1}{2}$ . Posons

- $T_n$  la boîte  $(0, 0) \dots (n, n-1)$  privée des arêtes supérieures et inférieures
- $T_n^*$  la boîte équivalente dans le dual après rotation d'angle droit.
- $A_n$  : "il existe un chemin ouvert de  $T_n$  reliant haut et bas"
- $A_n^*$  : "il existe un chemin ouvert de  $T_n^*$  reliant gauche et droit"

Ces ensembles et événements sont représentés à la figure 5.

$\{A_n, A_n^*\}$  est un système complet d'événements donc  $\mathbb{P}_p(A_n) + \mathbb{P}_p(A_n^*) = 1$ . Par ailleurs la bijection entre le graphe principal et le dual donne  $\mathbb{P}_p(A_n) = \mathbb{P}_{1-p}(A_n^*)$  ainsi pour  $p = \frac{1}{2}$  nous avons  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n) = \frac{1}{2}$

Or  $A_n \subset \bigcup_{x=0}^{n-1} \{|C((x, 0))| \geq n\}$  (l'un des points du bas étant relié au haut) donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n) &\leq \sum_{x=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(|C((x, 0))| \geq n) \\ &\leq \sum_{x=0}^{n-1} c_1 e^{-c_2 n} \quad \text{en régime sous-critique.} \\ &= n c_1 e^{-c_2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nous obtenons une absurdité, pour  $p = \frac{1}{2}$  la décroissance exponentielle n'est pas valable,  $p_c \leq \frac{1}{2}$

$p_c \geq \frac{1}{2}$  : nous supposons  $\theta(\frac{1}{2}) > 0$  et posons  $T(n)$  la boîte  $(-n, -n) \dots (n, n)$ . Définissons

$$A_n(g) = \bigcup_{x=-n-1}^n \{(x, -n) \leftrightarrow \infty \text{ par un chemin ne repassant pas dans } T(n)\}$$

et de même les événements  $A_n(d)$ ,  $A_n(h)$ ,  $A_n(b)$  pour les côtés droit, haut et bas de  $T(n)$ . Cette boîte et les points concerné par ces événement sont représentés à la figure 6.

Notons  $B_n = A_n(g) \cup A_n(d) \cup A_n(h) \cup A_n(b)$ , il s'agit de l'événement " $T(n)$  intersecte un amas infini". La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc croissante et par continuité monotone  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi(\frac{1}{2}) = 1$  en régime sur critique.

Les  $A_n(u)$  étant croissants de même probabilité, on peut montrer que  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n(u)) \geq 1 - \sqrt[4]{1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_n)}$  avec l'inégalité FKG. Donc  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n(u)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . Il existe ainsi  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_N(u)) \geq \frac{7}{8}$

Posons  $T^*(n)$  et  $A_n^*(u)$  la boîte duale et les événements équivalents dans le dual. Considérons  $C = A_N(g) \cap A_N(d) \cap A_N^*(h) \cap A_N^*(b)$  (figure 7).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{C}) &= \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N(g) \cup A_N(d) \cup A_N^*(h) \cup A_N^*(b)}) \\ &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N(g)}) + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N(d)}) + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N^*(h)}) + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\overline{A_N^*(b)}) \\ &\leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(C) > 0$ . Or si  $C$  se produit il n'y a pas unicité de la composante infinie. Il faudrait que les chemins infinis partant des cotés gauche et droit de  $T(n)$  doivent être reliés (et ceux partant du haut et bas de  $T^*(n)$  également). Or ils ne peuvent par l'être par l'extérieur de  $T(n)$  sans couper les chemins infinis du graphe dual (ou principal), et ne peuvent être tous les deux reliés par l'intérieur de  $T(n)$  (figure 7). D'où notre absurdité et la deuxième inégalité.  $\square$

### 3 Chemins sous contraintes

Nous nous sommes intéressé à la percolation sur des chemins particulier de  $\mathbb{L}^2$ , un sujet absent de notre bibliographie.

#### 3.1 Chemins a coordonnées positives

Nous nous intéressons au graphe induit sur  $\mathbb{N}^2$ , noté  $\mathbb{L}^{2+}$ .

**Proposition 10 : (Probabilité critique sur  $\mathbb{L}^{2+}$ )**

La probabilité critique de percolation par lien sur  $\mathbb{L}^{2+}$  vaut également  $\frac{1}{2}$ .

**Démonstration :** nous avons  $p_c(\mathbb{L}^{2+}) \geq p_c(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2}$  par inclusion de  $\mathbb{L}^{2+}$  dans  $\mathbb{L}^2$  (s'il y a percolation dans  $\mathbb{L}^{2+}$  alors il y a percolation dans  $\mathbb{L}^2$ ).

L'autre inégalité provient de l'adaptation de la démonstration du théorème de Kesten (proposition 9), qui reste valable (la décroissance exponentielle est toujours vraie par inclusion et le raisonnement pour la première inégalité ne s'appuie que sur des points de  $\mathbb{L}^{2+}$ ).  $\square$

#### 3.2 Chemins strictement croissants

**Définition :** un chemin est dit strictement croissant si les arêtes  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  qui le composent vérifient  $x + y < x' + y'$  (figure 8).

**Proposition 11 : (Inégalité sur la probabilité critique des chemins strictement croissants)**

La probabilité critique pour des chemins strictement croissant vérifie  $p_c > \frac{1}{2}$

Remarque : en revanche, nous n'avons plus la majoration  $p_c < 1$  du théorème 6.

**Démonstration :** Notons  $A_x$  l'événement "il existe un chemin infini ouvert strictement croissant partant de  $x$ ". Les  $(A_x)_{x \in \mathbb{N}^2}$  sont équiprobables.

En notant  $a$  l'arête  $(0, 0) \rightarrow (0, 1)$  et  $b$  l'arête  $(0, 0) \rightarrow (1, 0)$ , nous pouvons conditionner  $A_{(0,0)}$  par rapport à ces arêtes (figure 9) :

$$A_{(0,0)} = A_{(0,1)} \cap \{X_a = 1\} \cup A_{(1,0)} \cap \{X_b = 1\}$$

Or  $A_{(0,1)}$  est indépendant de  $\{X_a = 1\}$  et  $A_{(1,0)}$  est indépendant de  $\{X_b = 1\}$  donc

$$\mathbb{P}_p(A_{(0,0)}) = p\mathbb{P}_p(A_{(0,1)}) + p\mathbb{P}_p(A_{(1,0)}) - \mathbb{P}_p(A_{(0,1)} \cap A_{(1,0)} \cap \{X_a = 1\} \cap \{X_b = 1\})$$

Par ailleurs, l'intersection contient l'événement "les quatre arêtes  $(0, 0) \rightarrow (0, 1)$ ,  $(0, 0) \rightarrow (1, 0)$ ,  $(1, 0) \rightarrow (1, 1)$ ,  $(0, 1) \rightarrow (1, 1)$  sont ouvertes et  $A_{(1,1)}$  a lieu".

Ce qui donne  $p^4\mathbb{P}_p(A_{(1,1)}) \leq \mathbb{P}_p(A_{(0,1)} \cap A_{(1,0)} \cap \{X_a = 1\} \cap \{X_b = 1\})$  puis comme les événements  $A_x$  sont équiprobables :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(A) &\leq (2p - p^4)\mathbb{P}_p(A) \\ (1 - 2p + p^4)\mathbb{P}_p(A) &\leq 0 \\ \text{donc } 1 - 2p + p^4 &\geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}_p(A) = 0 \end{aligned}$$

Or  $1 - 2\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^4 > 0$  donc  $1 - 2p + p^4$  positif au voisinage de  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

## 4 Figures

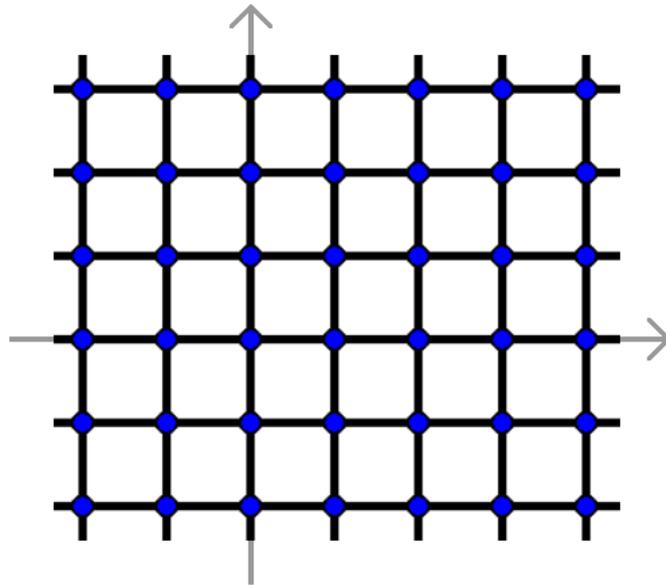


FIGURE 1 – Une partie du graphe  $\mathbb{L}^2$

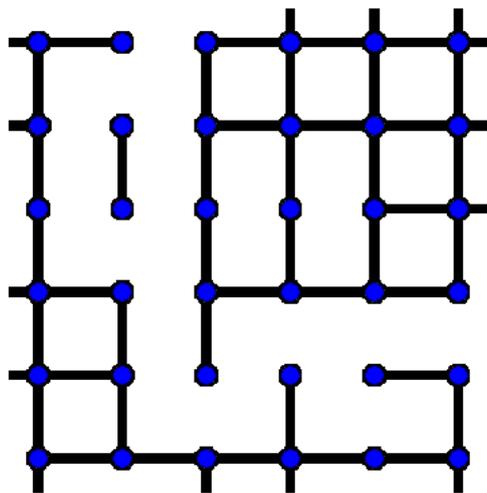


FIGURE 2 – Percolation de Bernoulli dans une partie de  $\mathbb{L}^2$  pour  $p = 0.6$

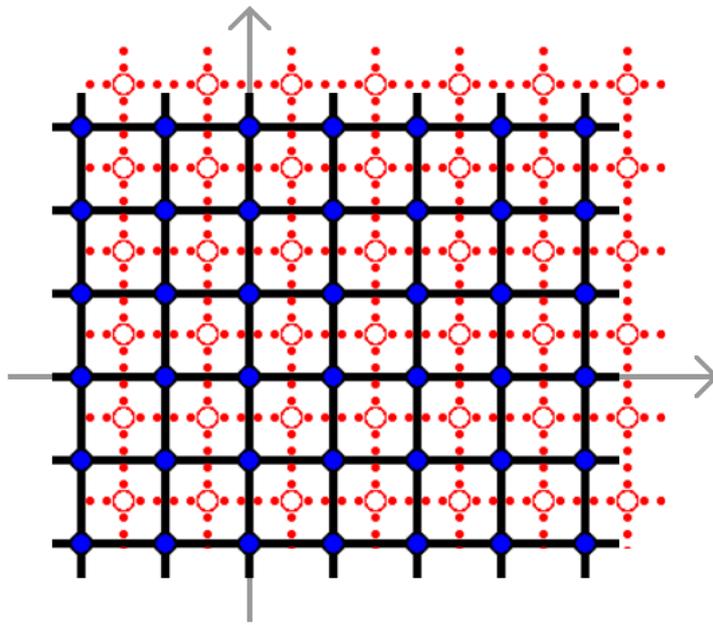


FIGURE 3 – Une partie du graphe  $\mathbb{L}^2$  (en noir) et de son dual (en rouge)

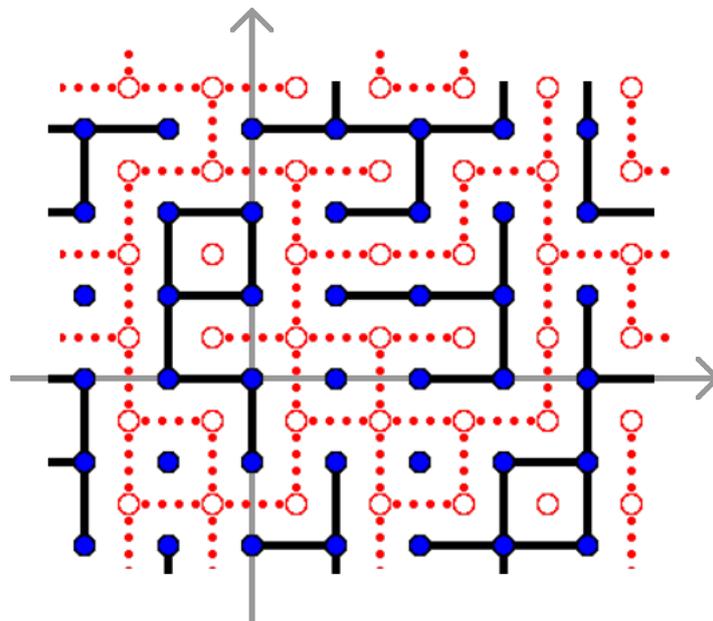


FIGURE 4 – Percolation dans le graphe dual

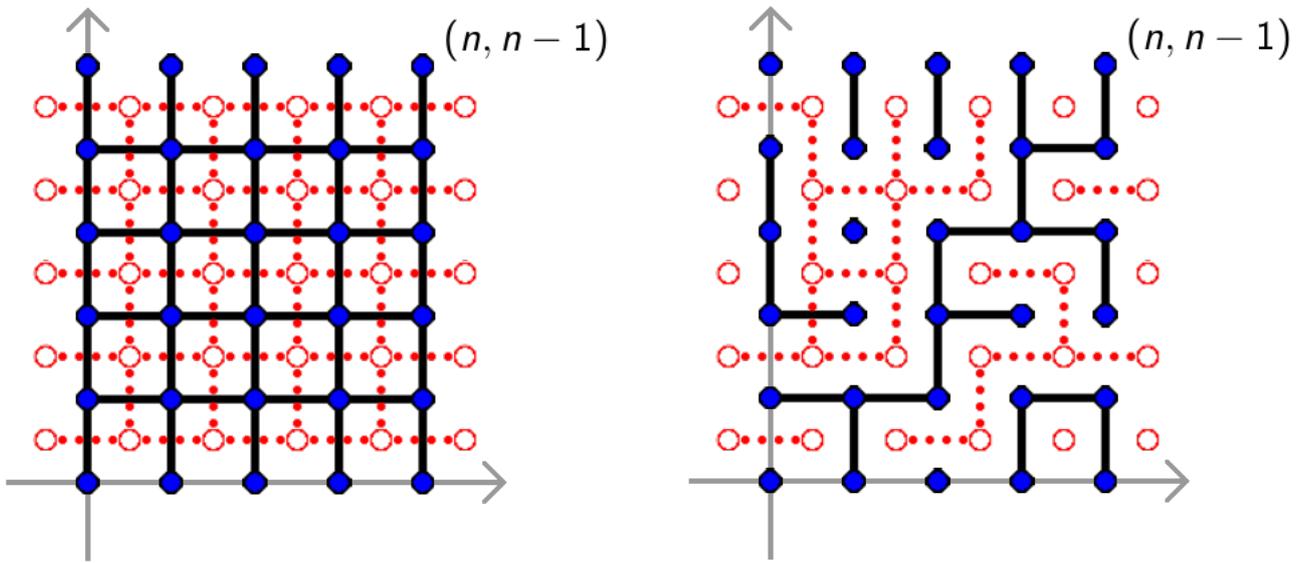


FIGURE 5 – Les boîtes  $T_n$  et  $T_n^*$  (gauche), et l'événement  $A_n$  (droite)

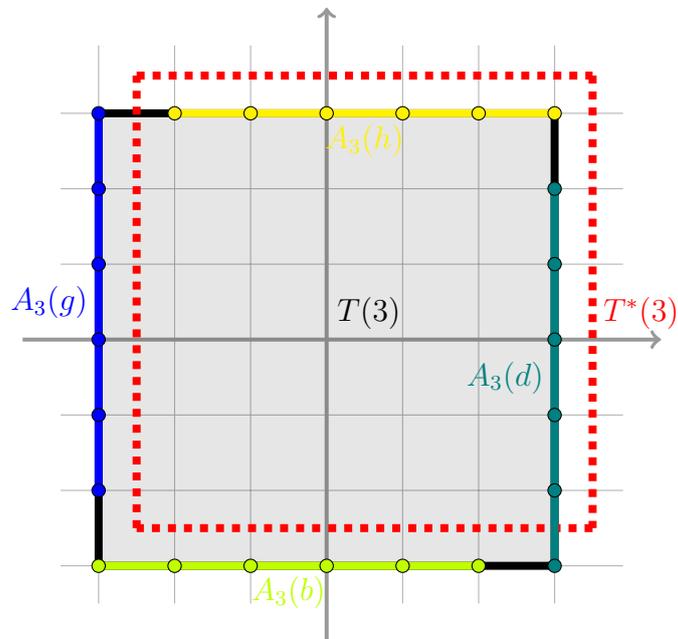


FIGURE 6 – Les boîtes  $T(3)$  et  $T^*(3)$ , avec les points de départs des  $A_3(u)$

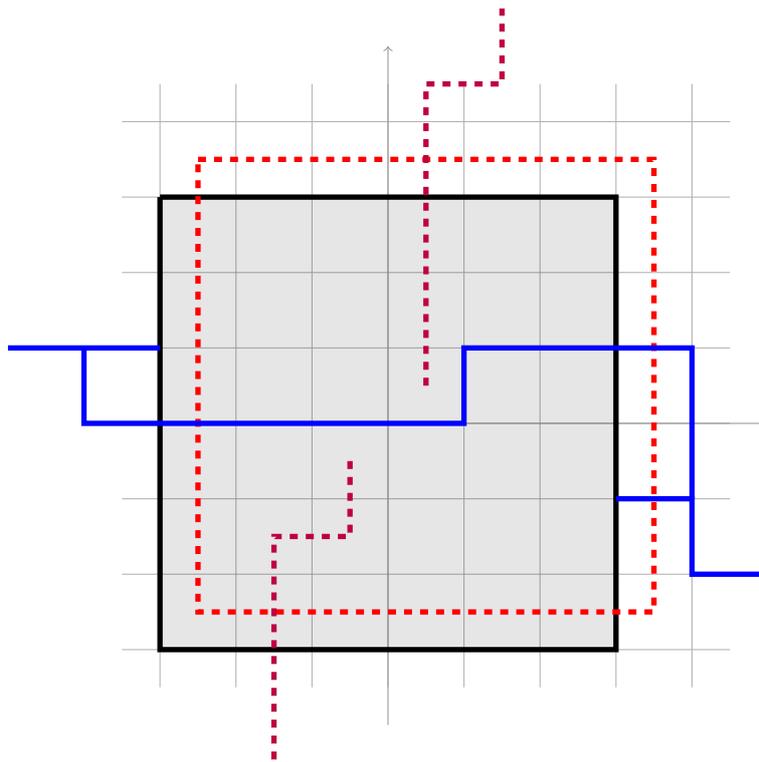


FIGURE 7 – L'événement  $C$

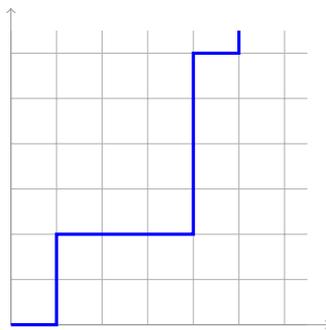


FIGURE 8 – Exemple de chemin strictement croissant

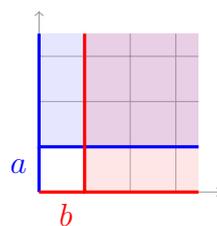


FIGURE 9 – Conditionnement par les premières arêtes

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Percolation dans un graphe</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions . . . . .	3
1.2	Préliminaires probabilistes . . . . .	3
1.3	Résultats généraux . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Cas du graphe <math>\mathbb{L}^2</math></b>	<b>5</b>
2.1	Dualité planaire . . . . .	5
2.2	Régimes sous-critique et sur-critique . . . . .	5
2.3	Valeur de la probabilité critique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Chemins sous contraintes</b>	<b>7</b>
3.1	Chemins a coordonnées positives . . . . .	7
3.2	Chemins strictement croissants . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Figures</b>	<b>8</b>

## Références

- [1] P. Crotti. Une introduction à la théorie de la percolation. *Universite de Fribourg-Suisse*, Seminaire printemps 2009.
- [2] G. Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag, seconde edition, 1989, chapitres 1-2-8-11.
- [3] O. Schramm I. Benjamini. Percolation beyond  $z_d$ , many questions and a few answers. *Electronic Communications in Probability* 1, no. 8, 1996, p. 71-82.
- [4] S. Broadbent J. Hammersley. Percolation processes i. crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, no. 53, 1957, p. 629-641.
- [5] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$ . *Communications in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, no. 74, 1980, p. 41-59.
- [6] P. Nolin. À propos de la percolation critique en dimension 2. *École Normale Supérieure et Université Paris-Sud*. [https://www.math.ens.fr/enseignement/telecharger\\_fichier.php?fichier=598](https://www.math.ens.fr/enseignement/telecharger_fichier.php?fichier=598) (consulté le 5/02/17).