Devoir de Mathématique pour le 23 mars

Correction.

EXERCICE 3

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;10]$ par : $f(t)=8te^{-\frac{1}{2}t}+2$.

1) Calculons les valeurs exactes de $f(0)$, $f(2)$, $f(10)$:

$$\begin{aligned}
\bullet f(0) &= 8\times 0\times e^{-\frac{1}{2}\times 0}+2\\
&= 0+2\\
&= 2\\
\bullet f(2) &= 8\times 2\times e^{-\frac{1}{2}\times 2}+2\\
&= 16e^{-1}+2\\
&= \frac{16}{e}+2\\
\bullet f(10) &= 8\times 10\times e^{-\frac{1}{2}\times 10}+2\\
&= 80e^{-5}+2
\end{aligned}$$

2) Calcul de la dérivée.
On dérive la fonction $t\mapsto 8te^{-\frac{1}{2}t}$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u\times v)'=u'v+uv'$, avec

$$\begin{array}{cc} u=8t & u'=8\\ v=e^{-\frac{1}{2}t} & v'=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\end{array}$$

Donc $f'(x)=8\times e^{-\frac{1}{2}t}+8t\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}t}=8e^{-\frac{1}{2}t}-4te^{-\frac{1}{2}t}$.

De plus, $4(2-t)e^{-\frac{1}{2}t}=(8-4t)e^{-\frac{1}{2}t}=8e^{-\frac{1}{2}t}-4te^{-\frac{1}{2}t}=f'(x)$.

3) Étude du signe de $f'(x)$:
Puisque $f'(x)=4(2-t)e^{-\frac{1}{2}t}$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

- Le nombre 4 est toujours strictement positif, quel que soit t.
- $2-t=0$ si et seulement si $-t=-2$, c'est-à-dire si $t=2$.
  De plus $-1<0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- Pour tout u, $e^u>0$. Donc $e^{-\frac{1}{2}t}>0$ pour tout t, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On complète le tableau par la règle des signes. On a donc le tableau de signe suivant :

t	0		2		10
$2-t$		$+$	0	$-$	
$e^{-\frac{1}{2}t}$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

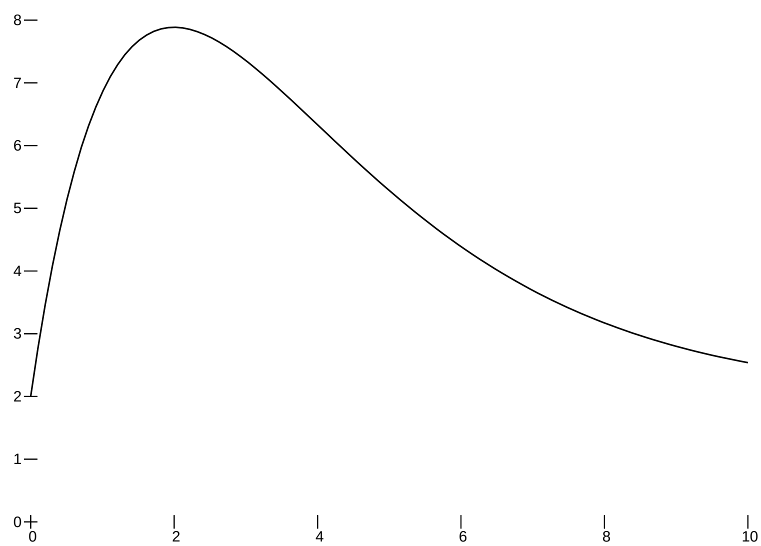
4) Tableau de variation de la fonction f.
On déduis le tableau de variation du tableau de signe de la question précédente.

t	0		2		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	2	$\nearrow$	$\dfrac{16}{e}+2$	$\searrow$	$80e^{-5}+2$

5) Tableau de valeurs (résultats arrondis à 0,1 près) :

t	0	0,5	1	1,5	2	3	4	6	8	10
$f(t)$	2	5,1	6,9	7,7	7,9	7,4	6,3	4,4	3,2	2,5

6) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal;
(Attention, la figure n'est pas à l'échelle voulue par l'ennoncée, elle est donnée ici à titre



indicatif)

Partie B – Application

1) Le taux d'ADH présent dans le sang cinq minutes après l'hémorragie est de $f(5) \simeq 5,3$ μg/ml.

2) D'après le tableau de variation de la question 4), le taux est maximal au bout de 2 minutes. Il est alors de $f(2) \simeq 7,9$ μg/ml.

3) Graphiquement, le taux d'ADH est supérieur à 6 μg/ml entre $t = 0,71$ et $t = 4,31$, c'est-à-dire pendant 3 minutes 36 secondes (soit 3,60 minutes).