Bac SMS : Mathématiques – Antilles-Guyane – Septembre 2005

Correction.

EXERCICE (8 points)

1)

- Parmi les 600 filles de ces écoles, 4,5% étaient asthmatiques : $\dfrac{600 \times 4,5}{100} = 27$.
- De plus, 5% des filles présentaient des symptômes asthmatiques : $\dfrac{600 \times 5}{100} = 30$.
- Il y a $1300 - 600 = 700$ garçons.
- 7% des garçons présentaient des symptômes asthmatiques : $\dfrac{700 \times 7}{100} = 49$.
- 88% des élèves ne présentaient aucun trouble en rapport avec cette maladie : $\dfrac{1300 \times 88}{100} = 1144$.

Les autres cases s'obtiennent par soustraction.

	Filles	Garçons	Total
Asthmatiques	27	50	77
Symptômes asthmatiques	30	49	79
Aucun trouble	543	601	1144
Total	600	700	1 300

Dans les questions suivantes, les résultats sont donnés sous forme décimale en arrondie à 0,01 près.

2) On choisit au hasard un élève parmi les 1300 élèves des écoles primaires : l'univers contient 1300 éléments.

a. $p(A) = \dfrac{700}{1300} \simeq 0,54$.

$p(B) = \dfrac{77}{1300} \simeq 0,06$.

b. « L'élève est un garçon » et « L'élève est asthmatique », c'est-à-dire « L'élève est un garçon asthmatique ». $p(A \cap B) = \dfrac{50}{1300} \simeq 0,04$.

c. On applique la formule de la probabilité de $A \cup B$: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Or $p(A) = 0,54$, $p(B) = 0,06$, et $p(A \cap B) = 0,04$ donc $p(A \cup B) = 0,54 + 0,06 - 0,04 = 0,56$.

d. « L'élève est un garçon » ou « L'élève présente des symptômes asthmatiques », c'est-à-dire « L'élève est un garçon ou présente des symptômes asthmatiques ».
$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$. Il faut donc calculer $p(C)$ et $p(A \cap C)$:

$p(C) = \dfrac{79}{1300} \simeq 0,06$

$p(A \cap C) = \dfrac{49}{1300} \simeq 0,04$

Donc $p(A \cup C) = 0,54 + 0,06 - 0,04 = 0,56$

e. L'évènement D « L'élève est une fille qui présente des symptômes asthmatiques » peut se décomposer ainsi : « L'élève est une fille » et « L'élève présente des symptômes asthmatiques ». De plus on peut traduire l'évènement « L'élève est une fille » par « L'élève n'est pas un garçon ». Donc :

$$D = \overline{A} \cap C$$

$p(\overline{A} \cap C) = \dfrac{30}{1300} \simeq 0,02.$

3) On choisit au hasard un élève atteint d'asthme : l'univers contient maintenant 77 éléments, on se restreint à la première ligne. Parmi celles-ci, 50 sont des garçons. Donc la probabilité pour que l'élève choisi soit un garçon est de $\dfrac{50}{77} \simeq 0,65$.

PROBLÈME (12 points)

Partie A : Etude et représentation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur [0 ;120] par : $f(t) = 4,4 + 0,12te^{-\frac{1}{60}t}$.

1) **a.** Calcul de la dérivée.

Lorsque l'on dérive, la constante 4,4 donne 0. On dérive la fonction $t \mapsto 0,12te^{-\frac{1}{60}t}$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$, avec

$$u = 0,12t \qquad u' = 0,12$$
$$v = e^{-\frac{1}{60}t} \quad v' = -\frac{1}{60} \times e^{-\frac{1}{60}t}$$

Donc $f'(x) = 0,12 \times e^{-\frac{1}{60}t} + 0,12t \times \left(-\dfrac{1}{60}\right) \times e^{-\frac{1}{60}t} = 0,12e^{-\frac{1}{60}t} - 0,002te^{-\frac{1}{60}t}$.

De plus, $0,002(60-t)e^{-\frac{1}{60}t} = (0,12 - 0,002t)e^{-\frac{1}{60}t} = 0,12e^{-\frac{1}{60}t} - 0,002te^{-\frac{1}{60}t} = f'(x)$.

b. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteur est nul : $f'(t) = 0$ si et seulement si $0,002(60-t) = 0$ ou $e^{-\frac{1}{60}t} = 0$. Or $e^u > 0$ quel que soit u : la seconde équation n'a pas de solution. De plus la première équation se résoud ainsi :

$$\begin{aligned} 0,002(60-t) &= 0 \\ 60 - t &= 0 \\ t &= 60 \end{aligned}$$

Donc la solution de $f'(t) = 0$ est $t = 60$.

c. Étude du signe de $f'(x)$:

- Le nombre $0,002$ est toujours strictement positif, quel que soit t.
- $60 - t = 0$ si et seulement si $t = 60$.
  De plus $-1 < 0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- Pour tout u, $e^u > 0$. Donc $e^{-\frac{1}{60}t} > 0$ pour tout t, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On complète le tableau par la règle des signes. On a donc le tableau de signe suivant :

t	0		60		120
$60-t$		$+$	0	$-$	
$e^{-\frac{1}{60}t}$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

d. Tableau de variation de la fonction f.
On déduis le tableau de variation du tableau de signe de la question précédente.

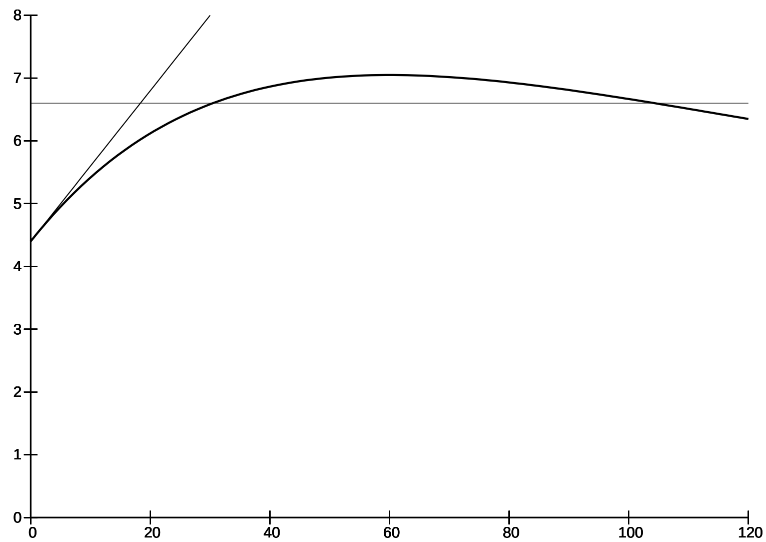
t	0		60		120
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	$4,4$	$\nearrow$	$4,4+\dfrac{7,2}{e}$	$\searrow$	$4,4+14,4e^{-2}$

2) Tableau de valeurs (résultats arrondis à 10^{-2} près) :

t	0	10	20	40	60	80	100	120
$f(t)$	4,4	5,42	6,12	6,86	7,05	6,93	6,67	6,35

3) Par définition, le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est le nombre dérivé $f'(0)$. Donc sa valeur est $f'(0) = 0,002(60-0)e^{-\frac{1}{60}\times 0} = 0,12 \times e^0 = 0,12 \times 1 = 0,12$.

4) Traçons la la tangente $\mathcal{T}$ en $x = 0$: c'est une droite passant par $x = 0$, $y = 4,4$ et de coefficient directeur $0,12$. Plaçons ensuite les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.



(Attention, la figure n'est pas à l'échelle voulue par l'ennoncée, elle est donnée ici à titre indicatif)

Partie B : Utilisation du graphique

1) D'après le tableau de variation de la question 1)d), la glycémie est maximale au bout de 60 minutes. La glycémie est alors de 7,05 mmol.L^{-1}.

2) La glycémie au bout de 45 minutes est de $f(45) = 6,95$ mmol.L^{-1}

3) Soit G_0 la valeur initiale de la glycémie. Par définition de f, on a $G_0 = 4,4$. la valeur G_1 est supérieure de 50% à G_0, c'est-à-dire $G_1 = G_0 + \dfrac{50}{100} \times G_0 = 4.4 + 2.2 = 6.6$ mmol.L^{-1}.

a. Il faut 30 minutes pour que la glycémie atteigne la valeur $G_1 = 6,6$ mmol.L^{-1}.

b. La glycémie repasse sous les 6.6 mmol.L^{-1} à $t = 104$, elle reste donc supérieure à cette valeur pendant $104 - 30 = 74$ minutes, soit 1 heure 14 minutes.