Contrôle de Mathématique (**A**)

Correction.

EXERCICE 1

1) On dérive la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$:

$$f'(x) = -\sin(x)$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times 1 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x) = x^5 + 7x^3 + 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^{5-1} + 7 \times 3x^{3-1} + 0 \\ &= 5x^4 + 21x^2 \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x) = x^4\sqrt{x}$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^{4-1}\sqrt{x} + x^4\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 4x^3\sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})^2\frac{1}{2\sqrt{x}} && \text{car } x > 0 \text{ donc } x = (\sqrt{x})^2 \\ &= 4{,}5x^3\sqrt{x} \end{aligned}$$

5) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 3x + 1}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2) \times (x^3 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 2) \times (3x^2 + 3)}{(x^3 + 3x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 6x^2 + 2x + 2x^3 + 6x + 2 - (3x^4 + 3x^2 + 6x^3 + 6x + 6x^2 + 6)}{(x^3 + 3x + 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{(x^3 + 3x + 1)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-2; 1]$ par $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 1$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = 3 \times 3x^{3-1} + 6 \times 2x - 0 = 9x^2 + 12x$.

De plus, $9x(x + \frac{4}{3}) = 9x \times x + 9x \times \frac{4}{3} = 9x^2 + 12x = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:

Puisque $f'(x) = 9x(x + \frac{4}{3})$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

$x + \frac{4}{3} \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}$;

De plus, $9x \geqslant 0$ lorsque $x \geqslant 0$.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	-2		$-\frac{4}{3}$		0		1
$9x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{4}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in [-2; -\frac{4}{3}] \cup [0; 1]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

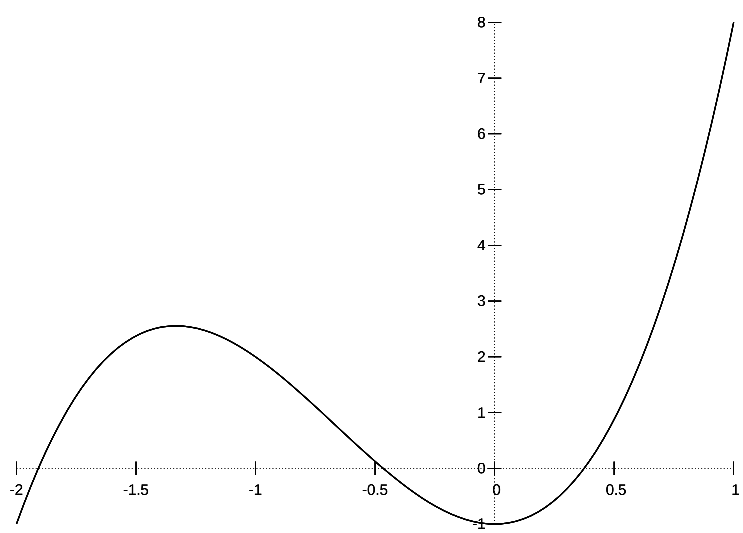
x	-2		$-\frac{4}{3}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$3,5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{95}{27} \simeq 3{,}5.$$

2) Tableau de valeurs (résultats arrondis à 0,1 près) :

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$	2,4	2	0,1	-1	0,9	8

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = -1,92$; $x = -0,46$ et $x = 0,38$.